

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

59e jaargang
1983/1984
nr. 3
november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894 - 11730. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, giro: 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

ISSN 0165-0394

De Wiskunde, eens Pelgrims Reize naar de Waarheid?

D. VAN DALEN

De hoofdpersoon uit John Bunyan's Eens Pelgrims Reize naar de Eeuwigheid, alleen gelaten en bespot door gezin en vrienden, wordt op zijn reis naar het doel van alle zijden van advies voorzien en zelfs hier en daar een eindweegs begeleid. De wiskunde, al enkele duizenden jaren op reis, deed ongeveer dezelfde ervaringen op als CHRISTEN, de volhardende pelgrim. Aan raadgevers, verleiders en fellow-travellers heeft het de wiskunde nooit ontbroken. Na een betrekkelijke rust, al aardig hersteld van familie-relaties is zij de laatste jaren weer het mikpunt van goede raad (het enige wat gemakkelijker is te geven dan te ontvangen).

Morris Kline, een historicus met een ruime kijk op de wiskunde, getuige zijn *Mathematics in Western Culture* en *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, is een van die moderne wiskundige welzijnswerkers die Wiskunde op haar gevaarvolle tocht uitbundig van raad voorzien en haar bezweren zich te bekeren eer het te laat is. Immers de rijke Wiskunde, bevriend met Jan en Alleman – Natuurkunde, Scheikunde, Biologie, Techniek, Sociologie, Psychologie, Linguïstiek, Musicologie, etc., dreigt te vereenzamen. Kline zegt in zijn *Mathematics, The Loss of Certainty*[1]) 'dit boek behandelt ... opkomst en verval van de wiskunde'. Niets meer en niets minder.

Laat ik beginnen met op te merken dat Kline een lezenswaardig en verrassend boek geschreven heeft. Niet omdat de historische feiten zo nieuw zijn, of omdat verwaarloosde delen aan het licht gebracht worden, maar omdat hij de feiten zo rangschikt en zo interpreteert dat er een ander beeld van de wiskunde en haar ontwikkeling ontstaat. De bloei van de wiskunde is voor Kline ten nauwste verbonden met die van de exacte wetenschappen (the sciences), de Griekse wiskunde was innig verbonden met de optica, de harmonieleer, de astronomie en de herleving in Europa na de middeleeuwen bracht ook de wiskunde een explosieve groei van de wiskunde en haar toepassingen. Keppler, Galilei, Descartes, Newton, Stevin, Huygens, zij allen waren er van overtuigd dat het boek van de natuur in wiskundige termen geschreven was. Zij waren er evenzeer van overtuigd dat wiskundige waarheden eeuwig en onveranderlijk waren, voor eens en altijd vastgelegd. Wiskundige waarheden waren verankerd in God en hij had de harmonie tussen natuur en wiskunde van te voren vastgelegd. De natuur en de wiskunde onderzoeken betekende voortdurend de hand van de schepper

[1]) *Mathematics, The Loss of Certainty*, by Morris Kline, Oxford University Press, 1980.

herkennen in zijn werken. Wiskunde (en op de tweede plaats natuurkunde) werd dan ook erkend als een weg tot de uiteindelijke kennis van de schepper (Cusanus, Newton, Leibniz, e.a.).
Met een zo duidelijk wereldbeeld was de voortgang van de wiskunde onproblematisch, en zeker tot in de 19e eeuw was de vooruitgang niet alleen voorspoedig, maar ook zonder motivatiekrisis. Er is alleen sprake van een steeds grotere zekerheid.
Het verlies van zekerheid begint volgens Kline in de negentiende eeuw, en wel op een van de meest traditionele gebieden van de wiskunde, de meetkunde.
Kant had in de achttiende eeuw de speciale wiskundekennis als 'a priori' gekarakteriseerd. In het bijzonder was volgens hem de ruimtelijke aanschouwing als product van de menselijke geest *de* werkelijke meetkundige structuur van die van de Euclidische meetkunde. Dit filosofisch dogma was het eerste slachtoffer van het onbegrensde onderzoek in de wiskunde. De geschiedenis is bekend, Gauss ontwikkelde een alternatief van de heersende Euclidische meetkunde – zoals uit correspondentie blijkt – waarin de som der hoeken van een driehoek *niet* 180° is. Gauss publiceerde zijn resultaten niet in extenso, er zijn alleen wat brieven, korte berichten in de *Göttinger gelehrte Anzeiger* en nagelaten papieren. De geleerde wereld nam eerst kennis van deze merkwaardige *niet-Euclidische meetkunde* uit publicatie van Nikolai Ivanovich Lobatchevsky (1825) en Johann Bolyai (1832). Hoewel Gauss uiterst terughoudend was over de niet-Euclidische meetkunde, trachtte hij wel experimenteel vast te stellen of de fysische ruimte wel of niet Euclidisch was, zonder duidelijk resultaat, zoals bij aardse metingen wel te verwachten was. De schok die de Wiskunde, en de mensheid in haar geheel, had te verwerken was dat een van de belangrijkste takken van theoretische wetenschap – de meetkunde – geen eenduidig bepaalde structuur had en niet vanzelf in overeenstemming was met de natuur: het falen van de hogere harmonie. Een schrijnend verlies van zekerheid, aldus Kline. Overigens bleef de rekenkunde als a priori kennisgebied over, d.w.z. wiskunde werd van 'wetenschap van getal en ruimte' tot 'wetenschap van getal' – een niet zo verbazende ontwikkeling gezien de herleiding van 'punt' tot 'getal' in de analytische meetkunde.
De negentiende eeuw was, volgens Kline, getuige van nog meer schokkende wiskundige onthullingen – de continue functie die nergens een raaklijn heeft, verzamelingen die 'even groot' zijn als sommige van hun (echte) deelverzamelingen, Cantor's paradox, etc. – onthullingen die stuk voor stuk, weer volgens Kline, de wiskundige zekerheid ondergroeven. Kline gaat zelfs zover de ontwikkeling van de wiskunde na de grote bloeitijd tot de achttiende eeuw onlogisch, *illogical*, te noemen. Deze onlogische ontwikkeling culmineert in de stelling van Gödel waarover later meer.
Wanneer we onder logica al of niet geformaliseerde, exacte redeneerkunst verstaan (geheel in overeenstemming met de traditie der eeuwen en zelfs nu nog algemeen aanvaard), dan moeten we constateren dat Kline de ontwikkeling van de wiskunde beoordeelt en veroordeelt op volstrekt onjuiste gronden en op grond van een populaire misvatting. Kline bedoelt kennelijk met 'logisch' zoiets als 'voor de hand liggend', 'te verwachten', of zelfs 'wiedes'. Immers zijn verwijt aan de meetkunde dat haar ontwikkeling met de introductie van de niet-Euclidische meetkunde *onlogisch* was geworden komt er op neer dat het

teleurstellend is niet langer één meetkundig systeem te bezitten dat dan ook nog in harmonie met de natuur zou moeten zijn. Wie daarvoor echter de logica (of de 'onlogica') aansprakelijk wil stellen zou haar ook de schuld kunnen geven van het bestaan van even en oneven getallen, of van eindige of oneindige verzamelingen. Kline's reactie op de z.g. onlogische ontwikkeling is ongeveer: de wiskunde was voorheen een eenheid, in harmonie met de natuurwetenschappen (i.h.b. de natuurkunde van Newton), en nu heeft een nadere analyse de eenvoud verstoord. Het lijkt wel of hij de verwondering over de niet-Euclidische meetkunde nog steeds niet te boven gekomen is. Waar zijn reactie op de ontwikkelingen in de traditionele wiskunde wat verouderd aandoet, is zijn standpunt inzake de grondslagenstudie van de twintigste eeuw ronduit teleurstellend. Zijn kennis van het gebied is oppervlakkig (althans voorzover men afgaat op het hier bedoelde boek) en zijn beweringen zijn hier en daar eenvoudigweg onjuist. Een voorbeeld: 'Kronecker accepteerde irrationale getallen die wortels zijn van hogeregraadsvergelijkingen indien zulke wortels berekend konden worden.' Het hier bedoelde probleem is dat Kronecker een constructieve wiskunde voorstond waarin alleen die dingen toegelaten werden die geconstrueerd konden worden uit de gehele (natuurlijke) getallen, dingen zoals 1/3, 2^7, maar ook (b.v.) $\sqrt{2}$ omdat er een effectieve benaderingsconstructie voor $\sqrt{2}$ is. De bovengeciteerde uitspraak is misleidend omdat Kronecker nu juist aangetoond had dat al zulke wortels benaderd (d.i. berekend) konden worden.
De twintigste eeuw bracht een aantal divergerende opvattingen over de vraag 'Wat is wiskunde?'; in de lijn van Kline redenerend moet men dus een nog groter verlies aan zekerheid concluderen. In het bijzonder heeft het Brouweriaanse intuïtionisme een grootscheepse zuivering in de wiskundige inventaris gehouden. Zoals de meeste vroeg twintigste eeuwse auteurs is Kline van mening dat stromingen als het intuïtionisme alleen verwierpen en niets toevoegden. Een blik in de bibliografie geeft de verklaring: Kline ontleent zijn informatie aan L. E. J. Brouwer's inaugurale rede van 1912! En dat terwijl de uitwerking van het intuïtionistische programma eerst na 1918 plaatsvond. Ook de reacties van de wiskundige gemeenschap op de ontwikkelingen in de grondslagen van de wiskunde, inclusief de z.g. grondslagenstrijd, die men bij Kline aantreft zijn rijkelijk gedateerd. Weliswaar citeert Kline 'ooggetuigen', maar ooggetuigen zijn zelden in staat tot een overwogen oordeel – een zekere afstand is nu eenmaal nodig. Een grappig gedichtje van Hoffenstein geeft de populaire opvatting over de kritische stromingen weer

Little by little we subtract
Faith and fallacy from fact,
The illusory from the true,
And then starve upon the residu.

Het einde van de narigheid is echter nog niet in zicht voor de Wiskunde. In het hoofdstuk *Disasters* bespreekt Kline de *onvolledigheidsstelling van Gödel*, die in een wat vereenvoudigde vorm luidt: 'ieder formeel systeem dat tenminste de rekenkunde toelaat kent uitspraken die (in het systeem) nòch te bewijzen nòch te weerleggen zijn.
Een wat spectaculairder vorm is: geen enkel formeel systeem dat tenminste de rekenkunde toelaat kan bewijzen dat in het systeem geen tegenspraken voorko-

men. De eerste vorm vertelt ons dat er geen Supersysteem is waarin de *hele* wiskunde past; er zijn altijd ware beweringen die niet bewezen kunnen worden. Op zichzelf is dat niet zo wonderlijk, men kan de situatie vergelijken met een opgave die niet uitkomt, en wel omdat er te weinig gegevens zijn. Het wonderlijke is dat volgens Gödel er voor zo'n supersysteem *altijd* gegevens zullen ontbreken. De tweede vorm lijkt ernstiger: zo'n systeem kan niet van zichzelf aantonen dat er geen paradox in voorkomt. De eerste reactie op Gödel's stelling was een van verbijstering: als de formele rekenkunde al te kort schoot, wat was er dan verder van de wiskunde te verwachten? Een reactie die door Kline zo'n vijftig jaar na dato onderschreven wordt. Immers, wat bij de meetkunde in de negentiende eeuw plaats vond nl. een vertakking in verschillende soorten (Euclidische en niet-Euclidische) meetkunden, vond bij de rekenkunde op een gigantische en nimmer eindigende manier plaats. Na iedere vertakking in verschillende rekenkundes traden voor ieder van deze weer nieuwe vertakkingen op. Wat is dan echter de *ware* rekenkunde? Is dan de hele wiskunde niet een chimera?
Ook hier neemt Kline een standpunt in dat bij enige reflectie voor een beter verruild had kunnen worden. En wel als volgt: onder de formele theorieën komen sommige voor met de prettige eigenschap dat zij iedere (relevante) uitspraak *beslissen*, d.w.z. òf bewijzen òf weerleggen. De logica heeft een groot aantal van die soort *complete* theorieën opgespoord, maar zij heeft tevens laten zien dat er massa's *incomplete* theorieën zijn. Het is duidelijk dat het prettig zou zijn als de rekenkunde compleet was, en de successen die voor 1930 geboekt waren hadden de hoop daarop gewekt, maar er was geen enkele a priori reden om aan te nemen dat dit het geval zou zijn. Gödel's stelling legt dus de tekortkomingen bloot van zekere formele systemen, maar er is niets sacrosancts aan formele systemen. Formele systemen zijn als spoorboekjes, er staat niet alles in en ze kunnen de treinenloop niet dwingen.
De tweede versie klinkt inderdaad alsof het bankroet van de wiskunde al aangevraagd is. Min of meer sterke theorieën zoals de rekenkunde of de verzamelingsleer kunnen hun eigen consistentie (d.w.z. niet-strijdigheid) niet bewijzen. So what? De hoop daarop was eenvoudigweg gegrond op te weinig data, en bij nadere overweging kan men ook niet beweren dat zo'n zelf-bewijsbare consistentie erg plausibel was. De teleurstelling over de stelling van Gödel is niet erger dan elke teleurstelling in de wetenschap wanneer men ontdekt dat de zaken niet zo eenvoudig liggen als men verwacht had. In zekere zin maakt die teleurstelling nadat de eerste schok voorbij is, plaats voor een soort wetenschappelijke euforie: er is werk aan de winkel, er moeten dingen verklaard worden, de nieuwe realiteit blijkt boeiender dan de oude mythe. De stelling van Gödel heeft, zoals ik elders geponeerd heb, de wiskunde zo'n dertig jaar bezig gehouden alvorens men hem als een normaal werktuig kon behandelen. Alle ontwikkelingen die Kline onder het hoofd 'verlies van zekerheid' rangschikt, zijn m.i. juister op te vatten als 'toename van zekerheid'. Kline's treurigheid bij iedere revisie van een simpel en harmonisch wereldbeeld is emotioneel wel te begrijpen. Eenvoudige, gave theorieën hebben meestal een zekere schoonheid, Newton's mechanica moet, vergeleken bij de kwantenmechanica, wel een voorbeeld van elegantie geweest zijn, en de Euclidische meetkunde moet voor de negentiende eeuwers verre de voorkeur verdiend hebben boven die 'pathologische' nieuwe

meetkundes. Echter, alles went, en na verloop van tijd heeft men zich aan nieuwe methoden aangepast, en zijn de nieuwe theorieën in een elegante vorm gebracht. De volgende generaties begrijpen niet meer waar men zich zo over opwond.
In het laatste deel van Kline's boek wordt een belangrijk onderwerp aangeroerd: *de isolering van de wiskunde.* Wiskunde heeft altijd in nauw contact gestaan met de (natuur-)wetenschappen. Veel onderwerpen (zo niet alle) zijn afkomstig uit fysische problemen. Snelheid – afgeleide, inhoud, oppervlakte – integraal, trillende snaar – Fourierreeksen, elektrische lading – potentiaaltheorie, levensverzekering – statistiek, vestingbouw – beschrijvende meetkunde. Kline roept een indrukwekkende rij van getuigen op die de toepasbaarheid en de toegepastheid van de wiskunde bevestigen: Bacon, Fourier, Kelvin, Kronecker, Klein, Poincaré, Courant, Birkhoff, Synge, von Neumann, Gauss ... Ieder van hen erkent de bevruchtende werking van de natuurkunde (N.B. tot voor kort was de natuurkunde (inclusief de sterrenkunde) de enige wetenschap die een hoogst verfijnde, zowel practische als abstracte, wiskunde eiste. Kline's getuigen behoren állen tot het precomputer tijdperk.) Er is geen enkele twijfel aan het onmiskenbare verband tussen wiskunde en natuurkunde, vrijwel iedere nieuwe fysische theorie suggereerde of eiste de ontwikkeling van een bijbehorende wiskunde theorie.
Iedere wiskundige, tot ver in de negentiende eeuw, had in zijn oeuvre wel een stukje 'toegepaste wiskunde', hoe onherkenbaar soms ook. Tot dusver valt er op Kline's betoog weinig aan te merken – misschien met één kleine waarschuwing: Kline heeft zijn citaten wel zorgvuldig uitgezocht. Het zou niet veel moeite kosten om bij dezelfde getuigen de lof van de zuivere wiskunde te vinden. Kline gaat echter verder, hij constateert een verwijdering van de wiskundigen van de toepassingsgebieden; de opkomst van de *zuivere wiskunde* die *l'art pour l'art* bedrijft. Deze zuivere wiskunde dringt de hele wiskunde in een isolatie waar zij verstoken is van de vruchtbare wisselwerking met de wetenschappen! Ook hier heeft Kline enig recht van klagen. Zeker, de toenemende professionalisering van de wiskunde bracht vanaf de negentiende eeuw een nieuw soort wiskundige. Waar vroeger slechts enkele uitverkorenen zich volledig met wiskunde bezig konden houden, bracht de groei van de Europese, en later van de Amerikaanse Universiteiten een nieuwe wiskundige, een die naast zijn onderwijstaak vrij kon beschikken over zijn onderzoekstijd. En die onderzoekstijd werd meer en meer benut voor de ontwikkeling van zuivere, niet door toepassingen of externe problemen gesuggereerde, wiskunde, geïsoleerd van de practische werkelijkheid. Kline signaleert het gevaar van ongelimiteerde abstractie en generalisatie; wiskundigen kennen dat gevaar, zo wordt Categorietheorie door een deel van de wiskundige gemeenschap 'abstract nonsense' genoemd. Hoewel iedereen met grote overtuigingskracht zal beweren dat in *zijn* onderzoek alleen heldere en welgemotiveerde begrippen voorkomen. Om de wiskunde op het juiste spoor te houden is, aldus Kline, een voortdurend contact met de natuurwetenschappen noodzakelijk: 'het juiste doel van onderzoek van wiskundigen is de natuur'.
Is er dan niets ter verdediging van de zuivere wiskunde aan te voeren. Men hoort vaak het volgende argument: *zuivere wiskunde bevat altijd delen die vroeger of later toegepast worden*, met als stilzwijgende conclusie, zelfs al is het niet toepasbaar, laat het toch maar zijn gang gaan, je weet nooit waar het goed voor is.

Kline bestrijdt deze opvatting met klem, hij somt een paar bekende voorbeelden op van zuiver wiskundige ontwikkelingen die later toepasbaar bleken: (1) de theorie der kegelsneden van (o.a.) Apollonius, (2) de niet-Euclidische meetkunde, (3) de groepentheorie (een amalgaam en generalisering van allerlei soorten operaties). De kegelsneden kwamen later van pas in Kepplers theorie van de planetenbeweging, de niet-Euclidische meetkunde in de relativiteitstheorie en de groepentheorie werd op grote schaal in de natuurkunde toegepast. Maar, zegt Kline, bovenstaande voorbeelden zijn wel degelijk ontstaan als antwoorden op practische problemen. Het eerste voorbeeld heeft te maken met brandpunten van spiegels en de constructie van zonnewijzers, het tweede met de vraag naar de meetkundige structuur van de fysische ruimte en het derde (o.a.) met kristalstructuren.

Ten dele heeft Kline gelijk, in de bovengenoemde voorbeelden is er een gedeeltelijke fysische motivering. Echter, er is een minstens even grote, zo niet grotere zuiver wiskundige motivering. In het geval van de niet-Euclidische meetkunde weten we dat Gauss o.a. in de fysische aspecten van de meetkunde geïnteresseerd was, maar een van zijn voorgangers, de Jesuïet Saccheri (1667-1733), onderzocht alternatieven van het parallellen axioma in traditie van Euclides, als zuiver meetkundig probleem. Evenzo kan men de geboorte van de groepentheorie onderkennen in het werk van Galois, in de context van de studie van de oplosbaarheid van vergelijkingen van de soort $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, weer een zuiver wiskundig probleem.

Kline's argumenten zijn dus niet erg overtuigend omdat in zijn voorbeelden weliswaar een fysische component aan te wijzen valt, maar meer ook niet. De voorbeelden zijn voor meer dan 50 % zuiver interne wiskundige problemen.

Om het argument van Kline nog verder te ondergraven, er zijn inderdaad voorbeelden van intern wiskundige ontwikkelingen, zonder enige aanleiding van buitenaf, die later practische toepassingen bleken te hebben. Om een enkel voorbeeld te noemen:

1. *Eindige meetkunde.* Het blijkt mogelijk om kunstmatige, eindige vlakken te construeren, d.w.z. systemen van punten en lijnen die aan een groot aantal meetkundige axioma's voldoen (idem voor (meerdimensionale) ruimtes). Deze vlakken werden eerst als pathologische voorbeelden ten tonele gevoerd, en later systematisch bestudeerd. Deze vlakken bleken later van belang te zijn bij het 'ontwerpen van experimenten' in de zin van de statistische bewerking van experimentele gegevens.

2. *De getaltheorie* was ten dele van practische oorsprong – in dienst van kooplieden, boekhouders, architecten, landmeters, maar ten dele van religieuze oorsprong – in dienst van priesters, astrologen etc. (denk aan Pythagoras). De daaruit voortgekomen getaltheorie is van volstrekt zuivere aard, eigenschappen van priemgetallen, kwadraatresten, irrationaliteitsproblemen, etc. De getaltheorie heeft al een aantal toepassingen geleverd waarvan ik een recente zal noemen. Priemgetallen worden tegenwoordig gebruikt om veilige geheime codes te maken, hiervoor gebruikt men zeer grote priemgetallen om het 'kraken' moeilijk te maken. Het is dus van belang om een gemakkelijke test te hebben die uitmaakt of een getal priemgetal is. Zo'n extreem snelle test is onlangs door de Amsterdamse wiskundige H. W. Lenstra ontwikkeld. In zijn bewijsvoering komen

allerlei abstracte (zuivere) zaken voor, Galois theorie, ...
3. *Lie Groepen*, aanvankelijk door Sophus Lie geïntroduceerd uit zuivere meetkundige motiveringen, thans een nuttig instrument in de theoretische fysica. Hetzelfde geldt voor de theorie der groepsrepresentatie.
4. *Logica*, een zuiver onderwerp bij uitstek. Na een lange periode van cultivatie in de filosofie en vervolgens in de grondslagenstudie van de wiskunde, thans een practisch hulpmiddel in de informatica. Men kan toch met de beste wil van de wereld niet beweren dat Aristoteles deze toepassingen in gedachten had!
5. *Berekenkunde*. Lang voor men beschikte over snelle elektronische rekenmachines introduceerde Alan Turing abstracte, denkbeeldige machines met het doel het begrip *effectief berekenbaar* vast te leggen (1936), ongeveer tegelijkertijd formuleerden anderen vergelijkbare ideeën (Gödel, Herbrand, Church, Curry). De aldus geschapen Turingmachines waren niet gemotiveerd vanuit de behoefte om practische rekenmachines te maken! Turing (en anderen) werkten in een zuiver theoretisch kader, dat van de beslisbaarheidsproblemen en effectieve formalismen. Op een veel later tijdstip, toen de theoretische informatica zich begon te interesseren voor problemen van berekenbaarheid, complexiteit, e.d. lag al een heel stuk abstracte theorie klaar! Het is verbazend en vermakelijk dat b.v. het begin van de complexiteitstheorie (die de ingewikkeldheid van berekeningen en programma's bestudeert) ligt bij Gödel's studie 'Über Längen von Beweisen' (1936).
Zelfs al zou Kline gelijk hebben wat de eerste inspiratie betreft, het is een heel normale gang van zaken dat een tak van de wiskunde na enige tijd volledig autonoom wordt en zelf vraagstellingen voortbrengt. Een voorbeeld is de differentiaal meetkunde; zo de geodesie al aan de wieg van het vak heeft gestaan, de ontwikkeling vond al spoedig in een geheel wiskundige vraagstelling plaats. Niettemin bleek bij de ontwikkeling van de relativiteitstheorie de (zelfstandig ontwikkelde) differentiaalmeetkunde als het ware klaar te liggen om toegepast te worden.
Ontegenzeggelijk komt in de zuivere wiskunde veel voor dat noch zinvol, noch diepzinnig is, het lijkt echter overbodig of zelfs schadelijk om op de een of andere bindende manier regelend op te treden. Men loopt al gauw kans onderzoek te verhinderen dat zijn kans nog verdient.
Daarenboven, en misschien is dat wel het belangrijkste, ook wanneer een stuk wiskunde ontwikkeld is omwille van zekere toepassingen, dan is het onvermijdelijk en noodzakelijk dat het na verloop van tijd in handen van zuivere wiskundigen komt. Er is een soort interne reflectie op de stof waarbij verbindingen met andere wiskundige disciplines ontstaan, naar geschikte formalismen gezocht wordt, generalizeringen worden voorgesteld, etc. Dat daarbij het karakter van het onderwerp verandert is niet zo verschrikkelijk, onder de vele overblijvende facetten komen de oorspronkelijke als regel volledig (en vaak nog beter dan vroeger) tot hun recht.
De wiskunde is te beschouwen als een groot zelfreinigend systeem, de normale criteria van *succes*, *toepasbaarheid*, *elegantie*, *exactheid* worden bij voortduring gehanteerd en minderwaardige wiskunde (in welke zin dan ook) sterft vanzelf uit. Dat wil natuurlijk niet zeggen dat men geen kruistochten meer zou mogen ondernemen tegen onzinnige of halfzachte projecten, dat maakt juist deel uit van

het normale zelfreinigingsaspect. Wat niet hoort te gebeuren is een centrale regeling van het wiskundig bedrijf (zoals b.v. in Stalinistisch Rusland), met gebods- en verbodsbepalingen.
In welke zin kan men nu Kline's 'Verlies van Zekerheid' opvatten? Niet in de zin die Kline op het oog heeft, nl. een ontwikkeling in de richting van een wiskunde waarin geen zekerheden, maar alleen een verbijsterende hoeveelheid alternatieven zonder duidelijke keuzemotivering, voorkomen. Eerder in de zin dat de eenvoudige zekerheden van het verleden plaats hebben moeten maken voor een gecompliceerder wiskundebeeld, een gecompliceerder waarheidsbegrip. Een wiskunde waarin het ene algemeen geldige gezichtspunt vervangen is door verschillende situatie-gebonden gezichtspunten, ieder voor zich correct en streng, maar vaak niet, of alleen met moeite, in onderlinge harmonie te brengen.

Problemen van dezelfde soort worden aangesneden door Davis en Hersh in hun *The Mathematical Experience*[1]), zij het op een minder moralistische wijze. Davis en Hersh zijn 'working mathematicians' die zich in grote openheid verbazen over hun vak. Zij signaleren dezelfde verschijnselen, maar dan 'van binnen uit', alleen al hierdoor is hun boek informatiever geworden dan het boek van Kline. Toegegeven, Kline levert meer historische details, maar met beoordelingsfouten wanneer het de moderne geschiedenis betreft. Davis en Hersh missen wel eens iets, maar hun opzet is dan ook minder ambitieus.
Zij bespreken eerder de dingen waar de doorsnee wiskundige zich na het werk wel eens zorgen over maakt, *wat is wiskunde?*; *waar moet het heen met de productie van de wiskunde?*; *waar is de meetkunde gebleven?*; *wat bestaat er eigenlijk?*; *wat is een bewijs?*; etc.
De moderne wiskunde biedt een vreemde aanblik, meer en meer mensen schrijven artikelen die door minder en minder mensen gelezen worden. Davis en Hersh citeren de Pools-Amerikaanse wiskundige Ulam die (en dat was al jaren geleden) een schatting had gemaakt van de jaarlijkse wiskunde productie: twee honderd duizend stellingen! Kan bij zo'n productie nog iemand een redelijk overzicht houden van de ontwikkeling en het kaf van het koren scheiden? De situatie duidt op een ver doorgevoerde specialisatie, een kleine telling (blz. 29) laat zien dat het recensietijdschrift van 1868 twaalf categorieën en achtendertig subcategorieën bevat, tegen eenenzestig en drieduizend vierhonderd in 1979.
In een verrukkelijke paragraaf beschrijven zij de moderne 'ideale wiskundige (niet in de zin van 'het ideaal', maar van de 'standaard' of 'gemiddelde' wiskundige). De ideale wiskundige werkt binnen een beperkt gebied, zeg -'*non-Riemannian hypersquares*'.
'Hij wordt gekarakteriseerd door zijn onderzoekgebied, door hoeveel hij publiceert, en in het bijzonder door wiens werk hij gebruikt en door wiens smaak hij volgt in de keuze van problemen. Hij bestudeert objecten waarvan het bestaan door niemand wordt vermoed, behalve door een handvol soortgenoten ... De objecten die onze wiskundige bestudeert waren voor de twintigste eeuw onbekend; naar alle waarschijnlijkheid waren ze dertig jaar geleden nog onbekend. Thans zijn ze de voornaamste dingen in het leven van een paar dozijn (hoogstens een paar honderd) van zijn kameraden ...

1) *The Mathematical Experience*, by P. J. Davis and R. Hersh, Birkhäuser, 1978.

Hij vindt het moeilijk om op zinnige wijze te converseren met het grote deel van de mensheid dat nooit van non-Riemannian hypersquares gehoord heeft. Dat schept grote moeilijkheden voor hem; er zijn twee collega's in zijn afdeling die iets van non-Riemannian hypersquares afweten, maar een van hen is met verlof en de andere is meer geïnteresseerd in non-Eulerian semirings ...
Op conferenties is het belangrijkste onderwerp als regel 'het decisieprobleem' (of misschien 'het constructie probleem' of 'het klassifikatie-probleem') voor non-Riemannian hypersquares. Dit pròbleem werd het eerst geformuleerd door Professor Nameless, de grondlegger van de theorie van non-Riemannian hypersquares. Het is belangrijk omdat Professor Nameless het geformuleerd heeft en tevens een partiële oplossing gegeven heeft die, ongelukkigerwijs, door niemand behalve Professor Nameless begrepen werd.'
Communicatie tussen experts geschiedt in een strikt jargon, hier is een voorbeeld: 'Als je de tangent mollifier toepast op de links quasi-martingale, dan krijg je een schatting die beter dan kwadratisch is, dus de convergentie in de Bernstein stelling blijkt van dezelfde orde als de approximatiegraad in Steinberg's stelling.'
In publicaties gaat het weer anders toe:
'Drie bladzijden definities worden gevolgd door zeven lemmas en tenslotte een stelling waarvan het gegeven al een halve bladzijde vraagt, terwijl het bewijs in wezen neerkomt op 'Pas de lemmas 1-7 toe op de definities A-H'.
De lezers die hij op het oog had (alle twaalf) kunnen de formele presentatie decoderen, het nieuwe idee in lemma 4 ontdekken, afzien van de oninteressante routine berekeningen in de lemmas 1, 2, 3, 5, 6, 7, en zien wat de auteur doet en waarom hij het doet. Maar voor de buitenstaander is het een geheimschrift dat zijn geheim nooit zal onthullen. Als (wat de hemel verhoede) de broederschap der non-Riemannian hypersquares ooit zou uitsterven dan zouden de geschriften van onze held nog minder vertaalbaar worden dan die van de Maya's.'
Vakmensen herkennen deze ideale wiskundige, het beeld is wat gechargeerd, maar het geeft een idee van de graad van specialisatie.
Hoe somber bovenstaand beeld van de ideale wiskundige de lezer ook mag stemmen, er is gelukkig ook, en altijd, een tegengestelde beweging van unificatie en integratie. Er zijn talloze voorbeelden in de ontwikkeling van de wiskunde van integratie: het begrip *lichaam* omvat de bekende getalsystemen – rationale getallen, reële getallen, complexe getallen, quaternionen – maar ook nog een aantal onbedoelde gevallen; het begrip *groep* omvat permutaties, matrices, gehele getallen, draaiingen, etc. Het begrip *categorie* omvat 'op een hoger niveau' alle vroegere generalisaties, groepen, ringen, vectorruimten, topologische ruimten, etc. In deze ontwikkeling is toch nog een redelijk perspectief voor een, zij het in beperkte mate, algemeen wiskundige.
Een van de fascinerende onderwerpen uit de huidige wiskunde is het begrip 'Bewijs' en het daarmee verbonden exactheidsbegrip. Tot voor kort werd dit begrip voornamelijk door logici bestudeerd, iedere wiskundige wist immers wat een bewijs was. Men leerde bewijzen zoals een zilversmid in de middeleeuwen zijn ambacht leerde in zijn gilde: door als gezel bij een ervaren meester jarenlang het handwerk te oefenen. Iedere wiskundige herkent een bewijs als hij er een ziet. Logici hebben zich over het begrip 'bewijs' gebogen en een aantal (min of meer equivalente) formuleringen gegeven, maar het laatste woord is nog niet gezegd.

In de praktijk gaat een stelling door een aantal fasen. A vermoedt dat de bewering X wel eens waar zou kunnen zijn, hij praat erover met anderen en B raakt geïnteresseerd. Hij vindt een bewijs en vertelt dit op het plaatselijk seminarium, waar de toehoorders een fout ontdekken. Samen met C verbetert B het bewijs zodat de gesignaleerde fouten verdwenen zijn. B en C schrijven nu een artikel 'A note on a conjecture of A' en sturen het naar het tijdschrift 'The Annals'. Daar wordt het door een redacteur doorgestuurd naar een expert met het verzoek over al of niet opnemen te adviseren. Deze *referee* leest het werk en vindt nog twee fouten, hij geeft aan hoe het bewijs van lemma 2 vereenvoudigd kan worden en hoe stelling 7 een bijzonder geval is van een oude stelling van Slowman en Buchenstein. Aangezien de stelling en de methoden interessant zijn adviseert hij de redacteur om het artikel te publiceren na het aanbrengen van verbeteringen. B en C gaan weer aan het werk en sturen het verbeterde manuscript op, dat nu na een extra wachttijd van 2 jaar verschijnt. De stelling spreekt de wiskundige wereld wel aan (dit is een gelukkige en niet vanzelfsprekende omstandigheid!) en in korte tijd verschijnen er drie artikelen 'A short proof of the conjecture of A', 'A's conjecture for non-Riemannian manifolds' en 'All A-numbers are prime'. Nu kan het vermoeden van A als correct en zinvol geaccepteerd worden door de wiskundige gemeenschap, er zijn alternatieve bewijzen (d.w.z. de kans dat de bewering juist is wordt groot geacht, dat zoveel onafhankelijke auteurs zich zouden vergissen wordt onwaarschijnlijk geacht), de bewering laat zich generaliseren op een interessante manier en er zijn interessante gevolgen binnen bestaande disciplines (b.v. getaltheorie). Vanaf dit moment gaat de stelling een eigen leven leiden in de literatuur. Overigens is deze succes-story nog geen garantie, er zijn stellingen die na meer dan 200 jaar als onjuist ontmaskerd werden.
Hoe zit het nu met het normale correctheidscriterium: 'een bewijs is correct als iedere (competente) lezer iedere stap als correct in kan zien? Dit criterium werkt prachtig bij korte overzichtelijke bewijzen, maar bij lange bewijzen met gecompliceerde stappen wil het nog al eens falen. Een historisch voorbeeld is het bewijs van de z.g. *hoofdstelling van Herbrand* van de hand van Herbrand zelf (1930), dit bewijs werd als zo moeilijk ervaren dat een aantal nieuwe, kortere, bewijzen gegeven werd zodat de *stelling* boven alle twijfel verheven was. Het duurde tot 1963 voordat een precieze analyse van Herbrand's bewijs een aantal fouten aan het daglicht bracht. Het repareren van deze fouten bracht gelukkig nieuwe inzichten, zodat er tenminste een beloning was voor al het werk.
Het zal nu duidelijk zijn dat er twee soorten 'bewijs' (en dus 'stelling') zijn, de exacte, theoretische uit de logica, en de practische, sociale uit de wiskundige gemeenschap. Niet zo heel lang geleden werd deze situatie nog extra gecompliceerd door de opkomst van de z.g. *computerbewijzen*.
In 1976 werd dit met kracht onder de aandacht van de wiskundigen gebracht door Haken en Appel die het vermaarde *vierkleurenprobleem* oplosten m.b.v. de computer. Het vierkleurenprobleem werd al in 1852 gesteld: kan iedere landkaart met hoogstens vier kleuren gekleurd worden? (Er zijn wel een paar voorwaarden, zoals het ontbreken van enclaves, maar daarvoor verwijzen we de lezer naar de literatuur.) In de praktijk bleek men steeds met vier kleuren uit te kunnen komen; het algemene probleem bleef echter onopgelost, de grote

aantallen (foute!) bewijzen ten spijt, tot eindelijk Haken en Appel het probleem reduceerden tot een eindig maar groot aantal gevallen die stuk voor stuk gekleurd moesten worden. Dit probeerwerk besteedden zij uit aan een computer, die na verloop van tijd een bevestigend antwoord gaf. Een mijlpaal om verschillende redenen, in de eerste plaats omdat het vierkleurenprobleem, samen met het vermoeden van Fermat, het vermoeden van Riemann, het vermoeden van Goldbach, en nog wat andere problemen, behoorde tot de traditionele grote problemen van de wiskunde, ten tweede omdat voor het eerst een groot spectaculair probleem met behulp van een computer opgelost werd. De universiteit van Appel en Haken vond het feit belangrijk genoeg om de zin 'four colours is enough' in zijn poststempel aan te brengen en –een zeldzame eer voor de wiskunde– de New York Times wijdde een artikel aan de (nu) vierkleurenstelling.
Voor wiskundigen was het resultaat, hoe verheugend ook, problematisch. Hier was een bewijs dat geen mens ooit met potlood en papier kon natrekken, *was* dat nog wel een bewijs? In de paragraaf *Why should I believe a Computer?* schetsen Davis en Hersh de problematiek en de reacties. Deze waren ruwweg van twee soorten:
1) Dit is geen wiskundig bewijs meer, er komt (a) natuurkunde in voor (de hardware van de computer), (b) een stuk 'experimentele' wiskunde in voor (de software van de berekeningen) die niet tot zeer moeilijk foutvrij is te maken.
2) Dit is principieel niet verschillend van alle vroegere wiskunde, er zijn (flink wat) meer stappen, maar vroeger konden we ons ook verrekenen.
Het eerste standpunt is fundamenteel van aard en als zodanig correct, zij het dat we er in de praktijk niet veel mee opschieten. Het tweede standpunt is pragmatisch, het eist dan ook dezelfde 'sociale' procedures als de normale bewijsgang die we hier boven schetsen. De getaltheoreticus Swinnerton-Dyer drukte het zo uit: 'De enige manier om deze resultaten te verifiëren (als men ze de moeite waard vindt) is om het probleem op een geheel onafhankelijke manier aan te laten pakken door een andere machine. Dit komt precies overeen met de situatie in de meeste experimentele wetenschappen.'
Het boek van Davis en Hersh behandelt een enorme lijst van onderwerpen die de wiskundige herkent als behorend bij zijn 'cultuur': 'waarom werkt wiskunde?', 'het nut van de wiskunde', 'existentie', 'orde en chaos', etc. Het aantrekkelijke van 'The Mathematical Experience' is juist de filosofische onbekommerdheid van de auteurs, zij bespreken zonder enige schroom de niet geringe problemen die opgeroepen worden door b.v. de moderne verzamelingsleer, de non-standaard analyse, de geloofwaardigheid van de computer. Juist deze benadering geeft iets fris aan het boek, het is alsof een patiëntencollectief nu eens de geneeskunst uiteenzet. Geen moeilijke woorden, maar gewoon de problemen die op het pad van ieder wiskundige liggen. Dat daarbij wel eens een steekje valt spreekt vanzelf maar is niet hinderlijk.
De wijsbegeerte –grondslagen– geschiedenis van de wiskunde is allang een terrein voor specialisten geworden, waar men niet binnentreedt zonder degelijke vooropleiding, maar, wat erger is, waar men zich soms verdiept in zaken die slechts zijdelings, of in het geheel geen, verband houden met de dagelijkse levende wiskunde.

Davis en Hersh hebben de problematiek van de wiskunde besproken vanuit het gezichtspunt van de dagelijkse praktijk met als resultaat een stimulerend en leesbaar boek over de triomfen en raadsels van de moderne wiskundige.
De reis van Wiskunde naar de Waarheid is in de handen van Davis en Hersh een fascinerende avonturenroman geworden waaruit de ware reiziger spreekt.

D. van Dalen is hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Utrecht in de wijsbegeerte van de wiskunde en de logica.

Boekbespreking

David J. Bartholomew, *Mathematical Methods in Social Science*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, Engeland, 153 blz., £ 10,50.

Dit werk is het eerste 'Guidebook' bij het 'Handbook of applicable Mathematics'. Zoals eerder uiteengezet is dit handboek in de eerste plaats bestemd voor de niet vak-wiskundigen.
Het heeft tot doel die wiskunde te verschaffen die in de diverse disciplines gebruikt worden. Naast de zes delen die uitsluitend aan de wiskunde gewijd zijn, de zes zg. core-volumes, zullen er zg. guidebooks verschijnen t.b.v. scheikunde, biologie, medicijnen, sociologie enz. In deze delen worden diverse op het betreffende wetenschapsgebied betrekking hebbende problemen besproken. Tevens wordt hierbij aangegeven hoe door het gebruik van wiskundige modellen de genoemde problemen opgelost kunnen worden. Op het moment dat er een werkelijke behandeling van de betreffende wiskunde zou moeten volgen wordt verwezen naar de daartoe in aanmerking komende hoofdstukken van de core-volumes. Dat betekent dat de guide-books op zich van weinig of geen waarde zijn, dat zij altijd in samenhang met de 6 grote delen bestudeerd dienen te worden. Enerzijds krijgen we zo een zeer aantrekkelijk samenhangend geheel, anderzijds jaagt dit de kosten voor de individuele gebruiker wel heel erg op.
De schrijver gaat in het onderhavige boek in de eerste plaats in op de heel bijzondere plaats die de wiskunde in de sociale wetenschappen inneemt. Terwijl in de meeste gevallen bij het verzamelen van meetresultaten in de natuurwetenschappen kleine individuele verschillen als 'ruis' worden beschouwd, die geëlimineerd dienen te worden om de achterliggende wet te vinden, gaat het in de sociale wetenschappen juist om die verschillen. Bovendien, wat zijn meetresultaten eigenlijk, zijn kwaliteiten wel te meten? Het zal duidelijk zijn dat het in deze wetenschappen in de eerste plaats gaat over verzamelen: steekproeven, waarschijnlijkheidsmodellen, verdelingen.
Het blijft uiteraard niet bij verzamelen en beschrijven, uiteindelijk wil men conclusies trekken en uitspraken over toekomstig gedrag doen. Multivariate methoden, discrete tijd Markow modellen, continue tijd modellen zijn in dit alles dan onontbeerlijk. De schrijver behandelt op zeer duidelijke wijze de diverse probleemvelden die hierbij om de hoek komen kijken. Voor uitvoerige wiskundige behandeling verwijst hij naar de genoemde delen van het handboek. Bovendien verwijst hij naar veel andere literatuur. Alles bijeengenomen een prima werk.

W. Kleijne

Grafieken en funktievoorschriften

HARRIE BROEKMAN

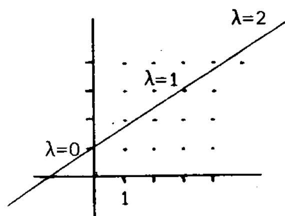
In zijn artikel 'Werken met grafieken' noemt Anne van Streun[1]) als belangrijkste activiteiten 'even proberen', 'een getallenvoorbeeldje nemen', 'een schetsje maken' en 'even controleren'.
In ons wiskunde-onderwijs is een aantal redenen aan te wijzen waarom ontwikkeling van deze activiteiten moeilijk tot zijn recht komt. De belangrijkste daarvan is wel dat we ons vaak moeilijk los kunnen maken van de strakke – vrij abstracte – opbouw van ons programma, met het algebraïsch rekenen én de problemen met variabelen als hoofdmoot.
In dat kader wil ik kort iets aangeven van een aantal problemen in de eerste jaren van het voortgezet onderwijs, om vervolgens een paar opmerkingen te maken bij een probleem uit 4 Havo. Tot slot volgt dan een drietal tips om verder mee te werken.

De eerste jaren van het voortgezet onderwijs

De eerste jaren houden wij ons – naast de meetkunde – vooral bezig met
a elementaire vector-rekening
b elementair tekenen
c elementair rekenen

Een paar problemen:

Ad a: 1 rol van λ. Eigenlijk maak je van iedere lijn een getallenlijn.
$\binom{x}{y} = \binom{0}{1} + \lambda\binom{3}{2}$
2 meerdere 'anders uitziende' voorstellingen van één lijn
$\binom{x}{y} = \binom{0}{1} + \lambda\binom{3}{2}$ $\qquad \binom{x}{y} = \binom{3}{3} + \mu\binom{-6}{-4}$



Ad b: Hier is veel ervaring mee nodig vóór leerlingen vlot kunnen schetsen. Ervaring is niet alleen gewenst met het tekenen maar vooral ook met het 'interpreteren', 'praten over', etc.

Ad c: Dit vormt vaak (te vaak!?) de hoofdmoot. Vanwege de opklimmende moeilijkheidsgraad bij het rekenen (algebraïsch rekenen) wordt daarom veelal de bekende volgorde gekozen: 1^e graads functies, 2^e graads functies, etc. De klap komt dan bij wortelfunctie, gebroken functie, etc.

Ad a, b, c: 1 Vertalingen over en weer zijn heel belangrijk, waarbij vooral ook duidelijk moet worden waarom bepaalde schrijfwijzen op bepaalde momenten prettig zijn.
Denk maar aan $x \to 2x + 3$; $y = 2x + 3$; $2x - y + 3 = 0$; $f(x) = 2x + 3$; $\{(x, y) | y = 2x + 3\}$; $\binom{x}{y} = \binom{0}{3} + \lambda\binom{1}{2}$; etc.
Of aan $x \to 2x^2 + 3x - 20$; $y = (2x - 5)(x + 4)$; $y = 2(x + \frac{3}{4})^2 - 21\frac{1}{8}$; etc.

2 Bij functies wordt sterk de nadruk gelegd op de volgorde. Van origineel naar beeld. Een gevolg daarvan is dat de leerlingen moeilijk kunnen kijken van beeld naar origineel. Toch start je vaak wel bij het beeld:
- oplossen van $x^2 - 2x - 15 < 0$
- nagaan van continuïteit
- tekenen van de grafiek van $x \to {}^2\log x$ door 'beelden' te kiezen
- tekenen van de grafiek van $x \to \sqrt{x - 3}$ door 'beelden' te kiezen
- bepalen van de symmetrie-as van de grafiek van $x \to x^2 - 5x + 3$ door uit te gaan van de beeldwaarde 3
- ....

VRAAG: Wat kunt u – in het licht van het voorgaande – zeggen over onderstaand proefwerk bij H6 deel 5HV van Moderne Wiskunde?

Proefwerk Atheneum-3 hoofdstuk 6 deel 5HV Moderne Wiskunde mei 1983

1 Gegeven is de functie $f: \begin{cases} x \to -x + 5 \text{ voor } x > 2 \\ x \to \frac{1}{2}x + 2 \text{ voor } x \leqq 2 \end{cases}$

a Teken de grafiek van f
b Bepaal het volledig f-origineel van -1
c Bepaal het f-beeld van $[0, 5]$
d Bepaal het volledig f-origineel van $[0, 1]$

2 Gegeven zijn de functies $f: x \to x^2 + 2x - 3$ en $g: x \to -x - 5$
a Teken de grafiek van f en werk daarbij eerst het bekende lijstje af
b Los op: $f(x) > 0$
c Los op: $f(x) < 4$
d Teken in dezelfde figuur de grafiek van g met een andere kleur
e Bereken de eventuele snijpunten van de grafieken van f en g
f Los op: $f(x) < g(x)$

3 Gegeven is de functie $f: x \to |2x - 6|$
Los op: $f(x) = 4$

Een opgave uit 4 Havo

De opgave $?x : x - 2 < \sqrt{x+3}$ heb ik voorgelegd aan diverse leerlingen, en leraren. Bij het oplossen bleek gekozen te worden voor verschillende aanpakken, die ruwweg als volgt aangegeven kunnen worden:
a getallen proberen, aftasten, zoeken [x heeft het karakter van een open plaats]
b gelijkstellen, rekenen en rondom gevonden waarden substitueren [x eerst als label (naam van een getal), dan als open plaats]
c gelijkstellen en rekenen mét meenemen van voorwaarden [x label én open plaats]
d 2 functievoorschriften, globaal plaatje, gelijkstellen etc. [x label én open plaats verspringend]

Opmerkingen

Ad a: Deze strategie wordt vaak gevolgd om nieuwe begrippen, algoritmen etc. te ontwikkelen óf om een gevoel er voor aan te kweken. Denk maar aan de start met vergelijkingen in de brugklas. Dan lijkt het of dat 'zoek eens', 'probeer eens', in discrediet raakt tot het bij continuïteit en limieten weer tevoorschijn komt. Maar op dat moment is het gevoel voor getallen en het lef om gewoon verstandig te proberen vaak verdwenen of uitgedoofd.

Ad b: Deze strategie is erg gevaarlijk om altijd te volgen, zoals we weten van opgaven als $(x-2)^3(2x-5)^2 < 0$. Dat veel leerlingen deze strategie kiezen is vermoedelijk een gevolg van de ingetrainde tweedegraads ongelijkheden. Het is wel goed als deze strategie – evenals de strategie *a* – dient om een idee te vormen, dit idee bij te stellen, etc.

Ad c: Deze strategie wordt vooral aanbevolen i.v.m. het feit dat dit de eerste keer is dat de leerlingen echt met voorwaarden rekening moeten houden. Het is niet zo gek om de voorwaarden duidelijk – evt. in andere kleur – te noteren, daar waar je ze tegenkomt.

Ad d: Deze strategie wordt het meest aanbevolen (al dan niet met noteren van voorwaarden). De kracht van deze aanpak is het samengaan van algebraïsch bezig zijn en visueel meetkundig bezig zijn. Het is hiervoor nodig dat de leerlingen redelijk vlot een grafiek kunnen schetsen én interpreteren.

VRAAG: Hoe lost u zelf de bijgevoegde opgaven uit Getal en Ruimte 4/5H1 (herhaling 1e hoofdstuk) op?
Wat kunt u in het licht van het voorgaande over deze opgaven zeggen?
Hoe zit het met de plaatjes bij I-3, I-4 en I-5?

Getal en Ruimte 4/5H1 (1978) pag. 167

1-1. Gegeven zijn de functies
$f\colon x \to -\sqrt{(2-x)}$, $g\colon x \to \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ en $h\colon x \to -x$.
a. Teken in één figuur de grafieken van f, g en h.
b. Bereken voor elk van de drie grafieken de coördinaten van het snijpunt met de x-as.
c. Bewijs dat de drie grafieken door één punt P gaan.
d. Benader de hoek die de grafieken van g en h met elkaar maken.

1-2. Gegeven is de functie

$$f\colon x \to \begin{cases} |x-1| & \text{voor } x \leqq 2 \\ 1 & \text{voor } 2 < x < 3 \\ |x-4| & \text{voor } x \geqq 3. \end{cases}$$

a. Teken de grafiek van f.
b. Vul in:
$D_f = \mathbb{R} \Rightarrow B_f = \ldots;$ $D_f = \langle 0,4 \rangle \Rightarrow B_f = \ldots$.

1-3. Gegeven zijn de functies $f_p\colon x \to x^2 - 4x + p$ $(p \in \mathbb{R})$.
a. Teken de grafiek van de functie f_3.
b. Vul in:
$D_{f_3} = \mathbb{R} \Rightarrow B_{f_3} = \ldots$ $D_{f_3} = \langle 0,3 \rangle \Rightarrow B_{f_3} = \ldots$
$B_{f_3} = [3,120] \Rightarrow D_{f_3} \subset \ldots$
c. Voor welke $p \in \mathbb{R}$ is f_p definiet positief?

1-4. Gegeven zijn de functies $f_p\colon x \to px^2 - p^2x + 5$, waarin p een negatief getal is. Welk bereik heeft f_p ?

1-5. Gegeven zijn de functies

$$f_a\colon x \to x^2 + \frac{a-5}{a}x - \frac{2}{a} \quad \text{en} \quad g\colon x \to -x^2,$$

waarbij $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ is
a. Teken in één figuur de grafieken van f_1 en g.
b. Bewijs dat de grafieken van f_a en g elkaar voor geen enkele waarde van a raken.
c. Bewijs dat voor iedere waarde van a de functie f_a twee verschillende nulpunten heeft.

Tot slot

1 Even proberen, even een getallenvoorbeeldje nemen, even een schetsje maken, even controleren. Dit alles vereist naast het hebben van *overzicht*, het hebben van lef. Het lef om te proberen, het lef ook om fouten te maken en niet snel bij de pakken neer te zitten.
Om dit te ontwikkelen is het nodig dat we meer 'spelend bezig zijn', zoals de wiskundeleraar die z'n leerlingen een vel roosterpapier gaf met een twintigtal

rechte lijnen er op getekend (waaronder een x-as en een y-as) en ze vroeg bij die lijnen functievoorschriften te schrijven.

Of die andere leraar, die z'n 25 leerlingen ieder een waarde van p gaf (-12 t/m 12). Vervolgens verzocht hij zijn leerlingen op grafiekenpapier de grafiek te tekenen van $f_p : x \rightarrow x^2 - px + 4$ $(p \in \mathbb{R})$.
[Ziet u ze al op volgorde aan de muur hangen?]
Of de leerling die de lijn $y = x$, de eerlijk delen lijn noemde, waarop een klasgenoot reageerde met: 'ja, en $y = 2x$ is de lijn 'ik twee keer zoveel als jij'... Of is het (j)ij twee keer zoveel als ik(s)?

2 Een schetsje maken, maar ook het tekenen van een nette grafiek lijkt bij veel leraren én veel leerlingen – m.i. geheel ten onrechte – niet in hoog aanzien te staan. Vermoedelijk komt dat mede door het woordje 'even' dat we er zo gemakkelijk bijzetten. Als we dat eens weglieten en de leerlingen stimuleerden te proberen, te schetsen, te controleren, wie weet zou de volgende opgave uit Wiskunde in de Week* dan tot de normale opgave behoren. Daar gebruiken we de grafiek eens voor iets anders dan bij het soort vragen als $?x : x^2 - 2x + 3 < 0$.

14a Het doel heiligt de gemiddelden
Gegeven is een rechthoek met zijden a en b. We zoeken een vierkant met dezelfde *omtrek*. De zijde van zo'n vierkant noemen we r, het *rekenkundig* gemiddelde van a en b.
We zoeken een vierkant met dezelfde *oppervlakte*. De zijde van zo'n vierkant noemen we m, het *meetkundig* gemiddelde van a en b.
We zoeken een vierkant met dezelfde *verhouding van oppervlakte tot omtrek*. De zijde van zo'n vierkant noemen we h, het *harmonisch* gemiddelde van a en b.
Bereken voor een aantal paren positieve getallen a en b de gemiddelden r, m en h. Is in al deze gevallen iets over de ligging van de getallen a, b, r, m en h op de getallenlijn te zeggen? Is er iets over te bewijzen?

14b Het doel heiligt de gemiddelden
We kiezen nu $a = x$ en $b = 1 - x$.
Dan zijn r, m en h afhankelijk van x.
Teken de grafieken van r, m en h als functies van x. Geeft dit een mogelijk bewijs van de in 14a gevonden vermoedens? We kiezen vervolgens $a = \sin^2 t$, $b = \cos^2 t$. Maak nu de grafieken van r, m en h als functies van t.

3 Veel van de activiteiten door Anne van Streun in het slot van zijn artikel genoemd worden uitvoerig beschreven in een heldere publicatie over functies van de afdeling Wiskunde van de S.L.O.**

* Wiskunde in de Week, NLO-IOWO samenwerkingsprojekt '78-'79
** In verband met ... een introductie op functies via verbanden. Diverse auteurs S.L.O. februari 1983.

Naast een schat aan voorbeelden en achtergronden vinden we daar een overzicht van een zestiental 'vertaal-activiteiten'. Zullen we eens – samen met collega's op school – nagaan aan welk van deze activiteiten we de hoogste prioriteit toekennen?

van \ naar	SITUATIE	TABEL	GRAFIEK	FORMULE
SITUATIE	herstructureren 1	MODELBOUW bijv.meten 2	schetsen 3	vinden v.e. formule vanuit een geconstateerd verband 4
TABEL	INTERPRETEREN lezen en interpreteren van data 5	omvormen 6	plotten 7	vinden v.e. formule bij de gegevens in een tabel 8
GRAFIEK	interpreteren 9	aflezen van coördinaten 10	omvormen 11	vinden v.e. formule bij een gegeven kromme 12
FORMULE	herkennen v.e. formule 13	substitueren, berekenen 14	schetsen v.e.kromme 15	herleiden 16

[1]) Zie Euclides, 59e jaargang, nr. 1.

Mededelingen

Kinderopvang tijdens de jaarvergadering

Om alle docenten de gelegenheid te geven de jaarvergadering/studiedag te bezoeken wordt bij voldoende deelname voor kinderopvang gezorgd in het gebouw van de SOL te Utrecht. Zij die hiervan gebruik wensen te maken kunnen zich telefonisch aanmelden bij de penningmeester (076-65 32 18). U dient zelf voor enig speelgoed en een 'lunchpakket' te zorgen.

Vrije markt op de jaarvergadering

Alle docenten die voor hun onderwijs leuke en voor anderen interessante zaken ontwikkeld of gemaakt hebben worden uitgenodigd deze op de jaarvergadering ten toon te stellen. In de pauzes kan iedereen er kennis van nemen, ideeën opdoen en met de makers van gedachten wisselen. U bent van harte welkom.

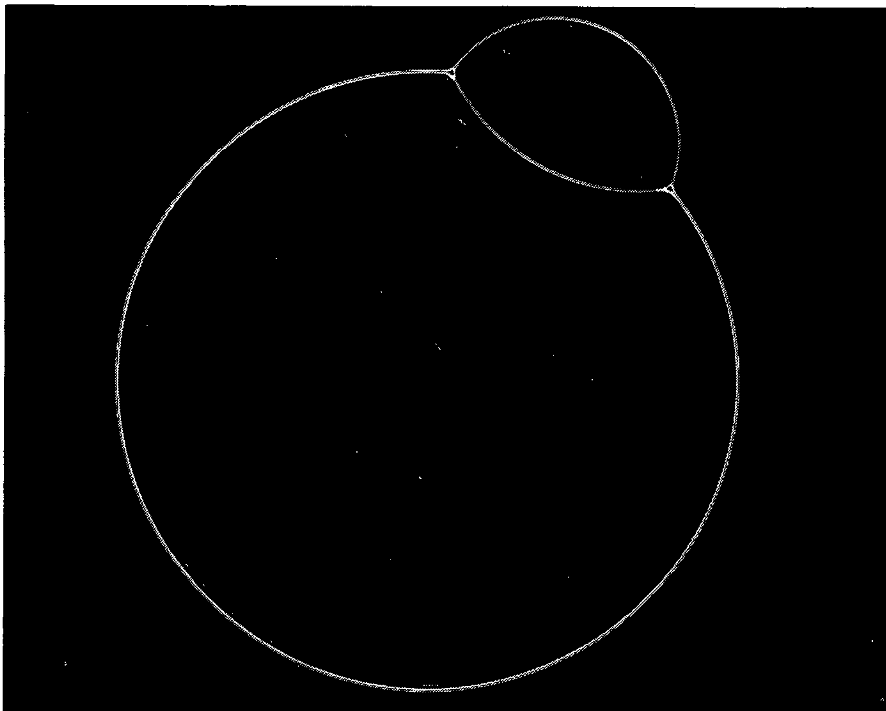
Centrum voor Wiskunde en Informatica

Het Mathematisch Centrum te Amsterdam heet vanaf 1 september 1983 Centrum voor Wiskunde en Informatica.
Hiermee wil het instituut zijn plaats als centrum voor wetenschappelijk onderzoek duidelijker aangeven.
Het adres blijft: Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam; postbus 4079, 1009 AB Amsterdam.

Zeepcirkels – rekenen, tekenen, meten

IR HENK MULDER

Zeepbellen zijn meestal bollen. Het is mogelijk om platte bellen te maken in de vorm van cirkels; daar is beter onderzoek aan te verrichten.
Daartoe wordt met behulp van een injektiespuit een zeepoplossing gespoten tussen twee glasplaatjes op een paar millimeter afstand. Het is zelfs mogelijk dat in miniatuur te doen, zodat de glasplaatjes de afmeting van een dia krijgen. Als dergelijke plaatjes dan in een projektor geschoven worden, kunnen ze zelfs vergroot geprojekteerd worden en op fotografisch papier vastgelegd. Zo zijn dan ook de foto's gemaakt die bij dit artikel gevoegd zijn.
Aan zeepvliezen zitten niet alleen fysische problemen maar ook wiskundig is er het nodige te beleven.



Een zeepvlies-duo
Hoe kleiner de straal van een bel is, des te groter is de oppervlaktespanning. Dat is goed te zien als, zoals in fig. 1, een grote en een kleine bel samen een duo vormen. De scheidingswand gaat in dat geval bol staan in de richting van de grote cirkel.
Verder volgt uit de fysische wetten dat de drie raaklijnen in de punten E en F, waar de drie zeepcirkels elkaar snijden, met elkaar hoeken maken van 120°. We kunnen evengoed stellen: de drie normalen maken met elkaar hoeken van 120°. In F is het eerste aangegeven, in E het tweede. Het laatste lijkt te verkiezen omdat de normalen naar de middelpunten wijzen van de drie cirkeldelen.

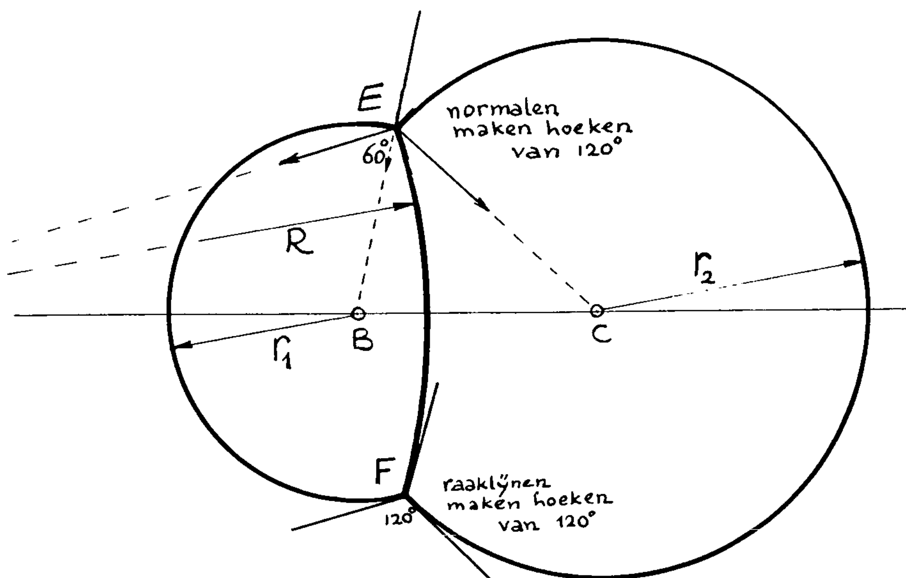


Fig. 1 Onsymmetrisch duo

Relatie tussen de stralen
In fig. 2 zijn de middelpunten aangegeven met A, B en C. We zoeken naar de relatie tussen de stralen r_1, r_2 en R.
We verbinden A, B en C met E. AE, BE en CE zijn de normalen in E. Trek ook nog BD. Driehoek DBE is dan gelijkzijdig. Maar dan loopt DB evenwijdig met EC, waardoor de driehoeken ABD en ACE gelijkvormig zijn.
Daaruit volgt: $\frac{R - r_1}{r_1} = \frac{R}{r_2}$.
Oplossen van R geeft: $R = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$ of in het algemeen $R = \frac{r_1 r_2}{|r_1 - r_2|}$ waarbij R de straal van de scheidingswand is en r_1 en r_2 de stralen van de beide zeepcirkels.
Uit de formule volgt dat de straal van de scheidingswand altijd groter zal zijn dan die van elk van de zeepcirkels. De afstand van de middelpunten B en C wordt, omdat de tophoek bij E 60° is, $\sqrt{(r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2)}$.

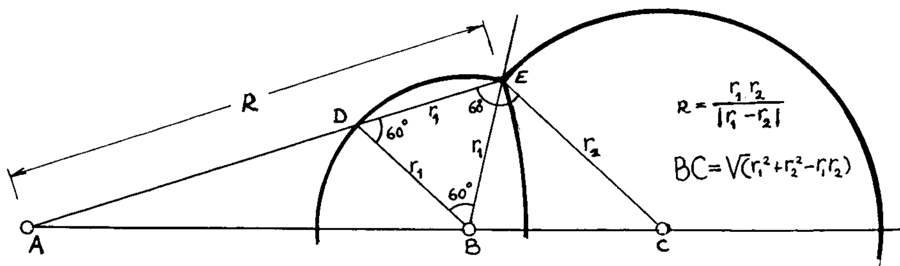


Fig. 2 Relatie tussen de stralen bij een duo

In het geval de stralen r_1 en r_2 toevallig even groot zijn, wordt $r_1 - r_2 = 0$ en de scheidingswand recht (zie fig. 3a).

Constructie van een duo

Als we zelf zo'n duo correct willen tekenen, beginnen we bijvoorbeeld met de kleine boog *EF* neer te zetten. Vervolgens kunnen we dan de drie normalen tekenen en vinden zo, door snijding met de middelloodlijn van *EF*, de beide andere middelpunten.

Het is best de moeite waard eens enkele gevallen netjes uit te construeren.

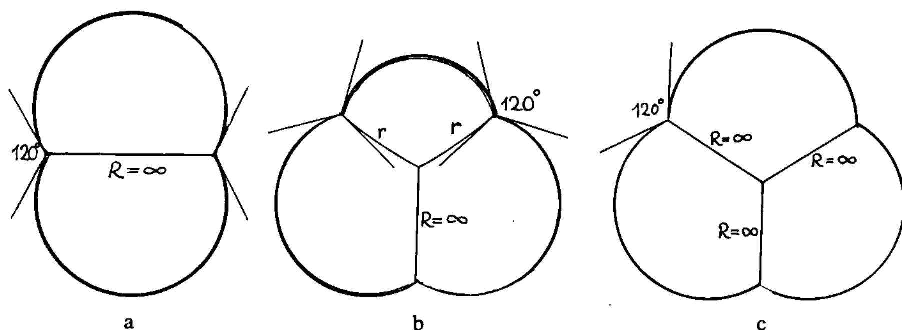


Fig. 3 Symmetrisch duo, halfsymmetrisch trio, symmetrisch trio

Een trio

In fig. 3b en 3c staan trio's getekend. In fig. 3b is één scheiding recht, omdat twee cirkels even groot zijn. In fig. 3c zijn alle drie de cirkels gelijk en de drie scheidingswanden recht. Dergelijke gevallen zijn niet moeilijk uit te tekenen. Ingewikkelder wordt het als we drie zeepcirkels laten snijden met drie verschillende stralen (fig. 4).

We stellen als probleem: gegeven de ligging van de snijpunten *A*, *B* en *C*; construeer nu de zes cirkels.

We beginnen met de buitenste drie.

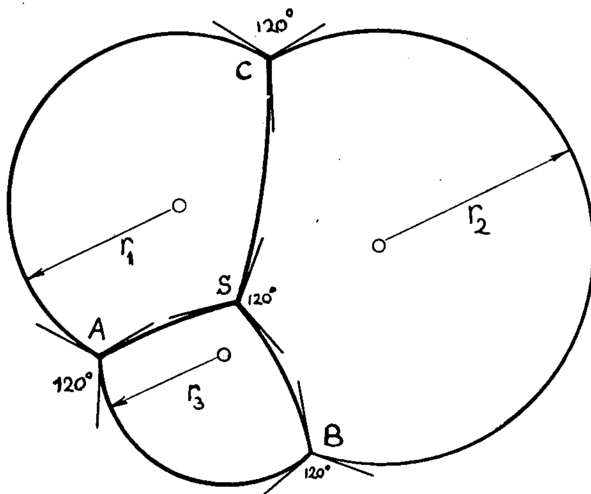


Fig. 4 Een trio met drie verschillende stralen

Constructie van een trio

Als één van de hoeken van driehoek *ABC* toevallig 60° is, zal de cirkelboog op de overstaande zijde precies een halve cirkel worden. Is zo'n hoek minder dan 60° dan wordt de overstaande boog minder dan een halve cirkel, anders meer. In het eerste geval ligt het middelpunt midden op de betreffende zijde, in het tweede geval binnen de driehoek en in het laatste geval erbuiten (fig. 5).
Ga zelf na dat de in fig. 5 aangeduide hoeken inderdaad de aangegeven waarden hebben.

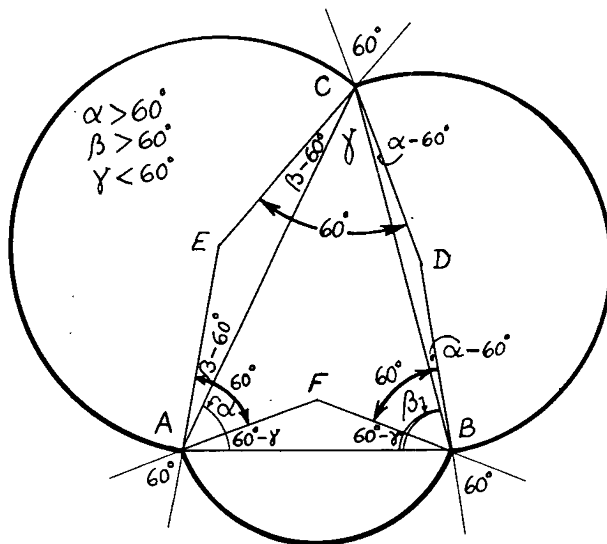
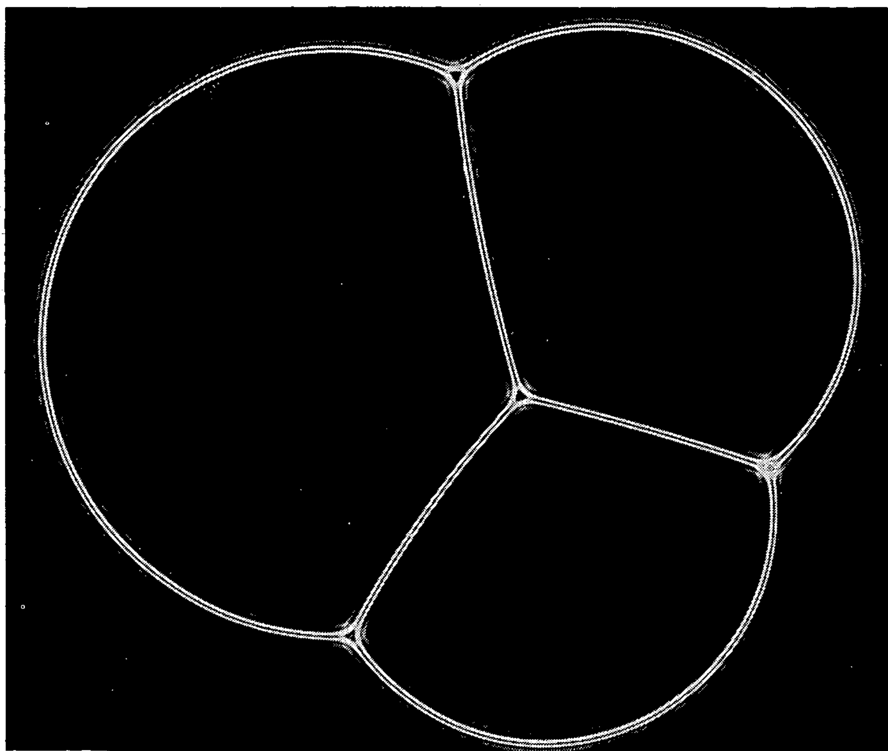


Fig. 5 Constructie van de buitencirkels bij gegeven driehoek *ABC*



Door tegen de zijden van driehoek ABC, hoeken ter grootte $\alpha - 60°$, $\beta - 60°$ en $60° - \gamma$ uit te zetten, kunnen de middelpunten D, E en F gevonden worden. Het lijkt dan niet moeilijk meer om dan nog de scheidingscirkels te construeren. Immers, hun middelpunten liggen op de lijnen DF, ED en FE en bovendien zijn de raaklijn- of normaalrichtingen in A, B en C nu bekend.

Het snijpunt van de scheidingscirkels

Nader onderzoek leert dat de drie scheidingscirkels gaan door een punt S, dat gevonden wordt door AD, BE en CF elkaar te laten snijden.
Het is niet eenvoudig dit aan te tonen. We beperken hier ons onderzoek door aan te tonen dat de drie genoemde lijnen inderdaad door één punt gaan.

Het punt S bestaat

De lijnen gaan door één punt als $\frac{a_1}{a_2} \times \frac{b_1}{b_2} \times \frac{c_1}{c_2} = 1$ (fig. 6). Om dat te onderzoeken proberen we een uitdrukking te vinden, om te beginnen, voor de verhouding c_1/c_2.
Het blijkt te lukken door een aantal malen de sinus-regel te gebruiken.

In driehoek ARF: $\frac{c_1}{\sin F_1} = \frac{RF}{\sin(60° - \gamma)} \rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin F_1}{\sin F_2} = \frac{\sin F_4}{\sin F_3}$

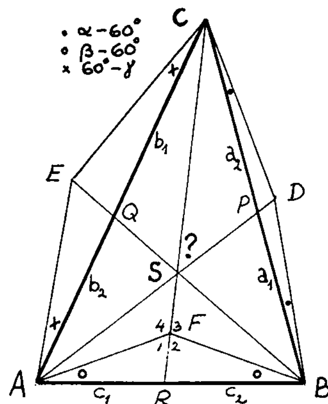


Fig. 6 Bepaling van het snijpunt van de scheidingscirkels

in driehoek BRF: $\dfrac{c_2}{\sin F_2} = \dfrac{RF}{\sin(60° - \gamma)}$

Evenzo in AFC: $\dfrac{\sin F_4}{b} = \dfrac{\sin(\alpha - 60° + \gamma)}{CF} \rightarrow \sin F_4 = \dfrac{b \sin(120° - \beta)}{CF}$

en in BFC: $\dfrac{\sin F_3}{a} = \dfrac{\sin(\beta - 60° + \gamma)}{CF} \rightarrow \sin F_3 = \dfrac{a \sin(120° - \alpha)}{CF}$

zodat $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{b \sin(120° - \beta)}{a \sin(120° - \alpha)}$

Evenzo $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{c \sin(120° - \gamma)}{b \sin(120° - \beta)}$ zodat $\dfrac{a_1}{a_2} \times \dfrac{b_1}{b_2} \times \dfrac{c_1}{c_2} = 1$

en $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{a \sin(120° - \alpha)}{c \sin(120° - \gamma)}$

Nu we weten dat dit punt bestaat, zouden we nog moeten aantonen dat de scheidingscirkels inderdaad door dat punt gaan. Iets voor stevige doorzetters.

Foto's

Zo te zien is de natuur knap ingewikkeld. Des te fascinerender is het om te zien hoe evenwichten zich snel en volgens de wiskundige regels instellen.
De foto's zijn gemaakt door Jos van Etten te Voorburg.

Uitleg: een uitnodiging tot meedenken

RALPH VAN RAAIJ

De achtergronden

In een cursus voor aanstaande leraren van het Pedagogisch Didactisch Instituut van de Rijks Universiteit Utrecht, liet begeleider Joop van Dormolen zich enkele keren de volgende provocerende uitspraak ontvallen: 'Uitleggen is de slechtste vorm van onderwijs'. Daardoor kietelde hij een gevoelig plekje; ik heb collegelopen altijd zeer plezierig gevonden en heb goede herinneringen aan leraren die lekker konden vertellen. Het bleef kriebelen en als het kriebelt kun je niet stilzitten. In de verslagen die ik schreef over de bijlessen, die ik gegeven heb als onderdeel van de cursus, heb ik daarom af en toe wat in het wilde weg gemijmerd over uitleg als vorm van onderwijs. Deze tekst is een bewerking van die vrijblijvende overpeinzingen, en dus zelf even vrijblijvend; overwegingen van een geïnteresseerde, geen conclusies van een deskundige; een uitnodiging tot meedenken.

Het verderop volgende gegoochel met bijvoorbeeld de begrippen actief en passief is een imitatie van de denkwijze van Cornelis Verhoeven, wiens boekje 'Tractaat over het spieken' menig lezer niet onbekend zal zijn. Als auteur-zijn alleen zou betekenen bepaalde woorden in een bepaalde volgorde zetten, dan zou ik inderdaad de auteur van deze tekst zijn. Maar dat ik juist deze woorden in juist deze volgorde zet is niet alleen mijn verdienste, en men kan zich afvragen: wat is dat, een auteur?

Vanuit het onderwijs

Nagenoeg iedereen heeft een opvatting of vaag idee over wat onderwijs is en moet zijn: een deskundige geeft les aan een geïnteresseerde (volgens Verhoeven), of minder kernachtig maar wellicht realistischer: iemand die verondersteld wordt capaciteiten te hebben in het tot stand brengen van bepaalde kennis en vaardigheid geeft les aan mensen die verondersteld worden daar op een of andere wijze profijt van te hebben. Eén vorm van onderwijs, en zeker niet de minst gangbare, is uitleg. De populariteit van uitleg heeft, denk ik, minstens twee oorzaken. Ten eerste is het een prettige werkvorm voor de (ervaren) docent: hij kan tot op grote hoogte zijn gang gaan, en mag het woord voeren over een onderwerp dat hij zelf, mogen we aannemen, boeiend vindt. Ten tweede is uitleg prettig voor de leerling omdat uitleg van zijn kant weinig inspanning verlangt, of althans lijkt te verlangen. Maar als bovenstaande karakterisering van onderwijs steek houdt, gaat het in dat onderwijs niet in de eerste plaats om pret – dat is

hoogstens een wenselijk en misschien zelfs noodzakelijk bijproduct van goed onderwijs – maar meer om profijt: de leerling moet er iets van opsteken. Als we dus uitleg als vorm van onderwijs willen beoordelen moeten we niet onderzoeken hoeveel pret, maar hoeveel profijt de leerling ervan heeft.

Vanuit het woord

Als het woord 'uitleg' iets zegt over de handeling, dan betekent uitleggen zoveel als: uit elkaar leggen, alle aspecten los ter sprake brengen, naast elkaar plaatsen, ontvouwen, platmaken. Dat uitleggen is overigens een handeling die de leraar en niet de leerling uitvoert en kan dus opgevat worden als een vorm van voordoen. Voordoen is op zich natuurlijk niet verfoeilijk, maar geenszins een garantie voor daadwerkelijk leren van de leerling.

Als leren een activiteit van de leerling is dan levert voordoen alleen nog niets op. Voordoen is dan voorkauwen; de gastronoom zou terecht verontwaardigd zijn als hij geprakte aardappels op zijn bord kreeg: een geprakte aardappel is niet meer helemaal een aardappel, uitgelegde wiskunde is niet meer helemaal de wiskunde zoals die in-elkaar-zit.

Als leren daarentegen niet een activiteit van de leerling is, maar meer een gebeuren dat de leerling overkomt, dan is het zeer goed mogelijk dat een geschikte vorm van uitleg dat gebeuren bewerkstelligt.

Vanuit het taalgebruik

Wat betekent dat eigenlijk: de leraar heeft X aan de leerling uitgelegd? Het lijkt duidelijk dat niet alleen wordt bedoeld dat de leraar een of ander vertoog over X heeft gehouden, maar ook dat dat vertoog in een of andere zin geslaagd is. De leerling heeft er enig begrip aan over gehouden. Ik denk daarom dat het niet in strijd is met het gangbare taalgebruik om te stellen dat 'uitgelegd hebben' minstens betekent 'geslaagd zijn in de uitleg'. Leerlingen zeggen wel: het is een leuke vent maar hij kan niet uitleggen. Natuurlijk kan de betreffende leraar wel een vertoog over het onderwerp in kwestie houden, maar dat vertoog is blijkbaar geen geslaagd vertoog, geen uitleg. Als we aannemen dat uitleg mogelijk is – en ik denk niet dat die veronderstelling vermetel is – dan kan uitleg zeer wel een vorm van onderwijs zijn. De vraag is alleen wat nu werkelijk onderwezen wordt.

Vanuit het leren

Het is opvallend dat in de Nederlandse taal zowel de leraar als de leerling leert. Het onderscheid to teach-to learn, lehren-lernen wordt met het Nederlandse woord 'leren' minder scherp. Als we uit deze terminologie conclusies mogen trekken, dan is het leren van de leraar en van de leerling wellicht hetzelfde proces. De één leert precies dan als de ander leert. Het is dan misplaatst om eenzijdig nadruk te leggen op de leer-activiteiten van de leerling, er is ook iets wat we leer-passiviteiten zouden kunnen noemen. Een leer-passiviteit is een toestand van de leerling waarin hem iets overkomt ('passiert' in het Duits) dankzij het leren van de leraar.

Deze passiviteit moet overigens niet in verband gebracht worden met verschijnselen als lamlendig onderuitgezakt in de schoolbanken hangen. Leer-passiviteit is niet een houding die de leerling, of de leraar voor hem, kiest, geen handeling die

hij kan verrichten. Het is hoogstens iets dat je vooraf kunt vermoeden en achteraf kunt constateren. Het is een extra naast de leer-activiteit, een naam voor de discontinuïteit tussen de leer-activiteit en het begrijpen van de leerling, voor het kleine wonder dat gebeurt als we plotseling iets snappen.
Door leer-activiteiten hopen we gunstige voorwaarden te scheppen om dat wonder te bespoedigen. Uitleg is vanuit die optiek een uitnodiging tot meedenken, tot activiteit in de hoop dat de leerling in leer-passiviteit iets overkomt.

De losse eindjes
Ik permitteer me de verwaandheid te doen alsof deze tekst geslaagd is. Dan is dit uitleg en dus een uitnodiging tot meedenken. Want uitleg kan nooit helemaal onthullen hoe de zaken in elkaar zitten en eist dus van de toehoorder dat die zelf mee-onthult. De hier aangestipte problematiek (sommigen zeggen: receptief versus zelf-ontdekkend leren) is er een, die waarschijnlijk vooral bij het vak wiskunde de kop op steekt. Wiskunde kun je niet alleen leren door te luisteren naar verhalen over wiskunde, je moet ook wiskunde doen. Maar daarom zijn niet noodzakelijk alle verhalen bij voorbaat zinloos. Bij wiskunde roept uitleg vragen op, bij geschiedenis veel minder.
Misschien is het mogelijk met het begrip 'leer-passiviteit' het verschijnsel uitleg nader te onderzoeken en te beoordelen. Zeker is dat uitleg alleen niet voldoende is voor goed wiskunde-onderwijs: de leerling moet wel degelijk ook leer-activiteiten verrichten.
Een bewering als 'uitleggen is de slechtste vorm van onderwijs' gaat niettemin te ver omdat zij impliciet veronderstelt dat onderwijs steeds in één vorm wordt gegeven. Maar omdat onderwijs veelvormig is, of althans behoort te zijn, kan uitleg in bepaalde gevallen een prima (de beste) vorm van onderwijs zijn, namelijk dan als van de leerling leer-passiviteit verlangd wordt.
Ik vraag mij af: wanneer is dat?

Over de auteur:
Ralph van Raaij voltooide onlangs zijn wiskundestudie aan de Rijksuniversiteit Utrecht. Leraren van het Jeroen Bosch College te 's-Hertogenbosch wekten zijn belangstelling voor wiskunde.

Mededeling

Oproep

In verband met een onderzoek naar de wiskunde in de Nederlanden in de 17de eeuw, dat onder meer bestaat uit het samenstellen van een inventaris van

ZEVENTIENDE-EEUWSE WISKUNDIGE HANDSCHRIFTEN

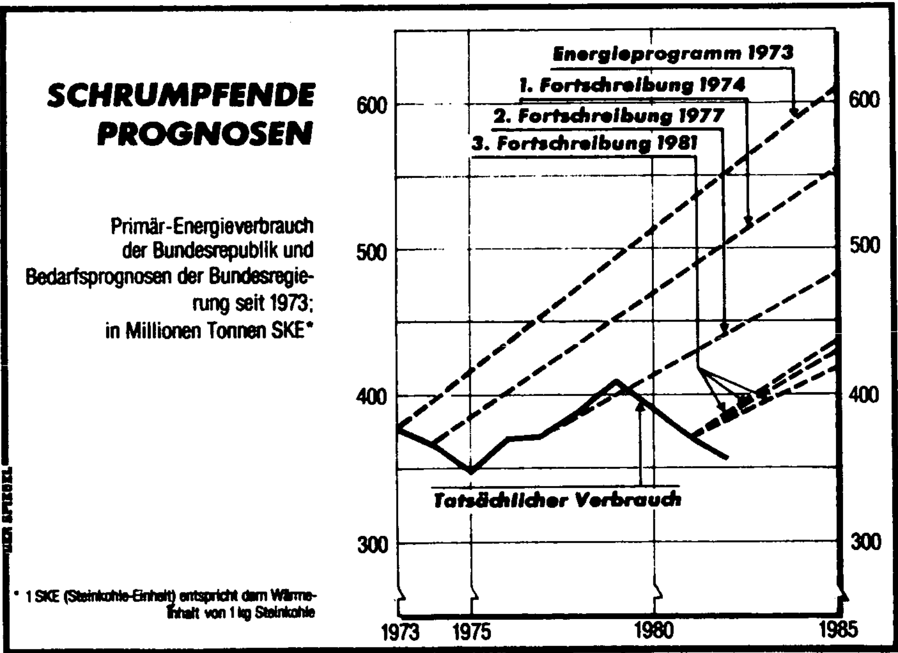
zou ik graag geattendeerd worden op (mogelijke) vindplaatsen van dergelijke handschriften. De grote openbare bewaarplaatsen (bibliotheken, archieven) worden vanzelfsprekend doorgenomen. Handschriften in kleinere verzamelingen of in privébezit vallen echter buiten mijn waarneming, en daarom stel ik suggesties over deze laatste kategorie (wegens mijn werkzaamheden 'in het land' bij voorkeur schriftelijk) zeer op prijs. De naam van een kontaktpersoon is voldoende, maar uitgebreidere informatie is natuurlijk welkom.

J. A. van Maanen, Math. Inst. der Rijksuniversiteit, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht.

VWO-Eindexamen Wiskunde A

N.B. Van de kandidaat wordt gevraagd elk antwoord voldoende te motiveren.

1. Uit het Duitse weekblad 'Der Spiegel' van maart 1983 komt de volgende grafiek die het *werkelijke* energieverbruik (Tatsächlicher Verbrauch) in Duitsland weergeeft van 1973 t/m 1982, de *voorspellingen* in 1973 (Energieprogramm 1973) en de aangepaste voorspellingen in 1974, 1977 en 1981 (Fortschreibung 1974, 1977, 1981).



max. ptn.

4 *a.* In 1973 is het verbruik 375 miljoen ton SKE. Lees de grootte van het verbruik in 1982 af. Hoe groot is de gemiddelde toe/afname per jaar over de periode 1973-1982?

4 *b.* Geef een schatting van het totale energieverbruik in de periode van 1973 tot en met 1982.

max.
ptn.

De voorspellingen zijn grotendeels in tegenspraak met de werkelijkheid.

3 *c.* In welke jaren was het energieverbruik groter dan volgens de op dat moment meest recente voorspelling?

3 *d.* Gedurende welke periode(n) steeg het verbruik sneller dan volgens de op dat moment meest recente voorspelling?

4 *e.* In 1981 zijn er drie voorspellingen gedaan.
Bekijk de hoogste van de drie en neem aan dat het de bedoeling is dat die grafiek zich rechtlijnig voortzet.
Bereken hoeveel energieverbruik door die grafiek voor het jaar 2000 voorspeld wordt.

2. De verandering per jaar in de bevolkingsopbouw van een zekere diersoort (A) wordt gegeven door de Leslie-matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}01 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$$

2 *a.* Verklaar de betekenis van het getal 0,25 in deze matrix.

4 *b.* Op een zeker tijdstip ($t = 0$) is de bevolkingsopbouw als volgt: 12000 jonge, 12000 volwassen en 6000 oude dieren.
Bereken de bevolkingsopbouw na één jaar en na twee jaar.

Met een computer is de bevolkingsopbouw na drie, vier, vijf en zes jaar berekend:

	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$
jong	2206	1169	673	362
volwassen	1878	1103	584	336
oud	908	470	276	146
totaal	4992	2742	1533	845

3 *c.* Teken op logaritmisch papier de grafiek van het verloop van de totale bevolking in de periode van $t = 0$ t/m $t = 6$.
Geef een formule die de totale bevolking na t jaar redelijk goed benadert ($0 \leq t \leq 6$).

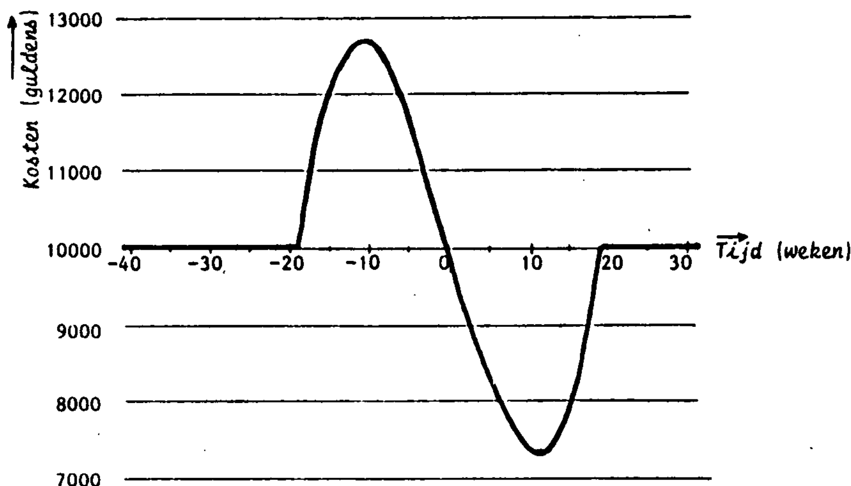
3 *d.* Een tweede diersoort (B) groeit in dezelfde periode jaarlijks 30 % in aantal. Op het tijdstip $t = 2$ zijn er 3400 dieren van soort B.
Schrijf de totale bevolking van deze soort als functie van t.

3 *e.* Op welk tijdstip zijn er evenveel dieren van soort A als van soort B? (Beantwoord deze vraag met behulp van grafieken).

3 *f.* Bereken op welk tijdstip er 40.000 dieren van soort B zullen zijn in het geval de jaarlijkse groei van 30 % aanhoudt.

max.
ptn.

3. De voorraadkosten van een verffabriek vertonen in de jaren 1981/’82 het volgende verloop:



Het normale niveau van de voorraadkosten bedraagt ƒ10.000,–.
Het punt 0 op de horizontale as correspondeert met 1 april 1982.
De kostenverandering hing samen met een voor het voorjaar 1982 voorziene, tijdelijke produktieverhoging.

3 *a.* In welke maand (en welk jaar) begonnen de voorraadkosten af te wijken van het normale niveau?

Een medewerker heeft voor het gedeelte van de grafiek dat een afwijking van het normale niveau laat zien, een formule opgesteld:

$$V = t^3 - 363t + 10000$$

(V = voorraadkosten in gld, t = tijd in weken).

Ga bij de beantwoording van de vragen b, c en d uit van deze formule.

5 *b.* Op welk tijdstip t begint (resp. eindigt) de afwijking van het normale niveau?

5 *c.* Bereken hoeveel % de maximale afwijking van het normale niveau bedroeg.

5 *d.* Met hoeveel gulden per dag daalden de voorraadkosten rond 1 april 1982?

max.
ptn.

4. Kandidaat-kosmonauten worden aan een zware (lichamelijke en psychologische) test onderworpen alvorens zij toegelaten worden tot een verdere opleiding.
De kans dat een kandidaat slaagt voor de eerste test is 10 %.
Voor kandidaten die de eerste test niet gehaald hebben, volgen nog maximaal twee herkansingen. Iedere keer opnieuw met dezelfde slaagkans.
Als de kandidaat de derde keer opnieuw niet aan de eisen voldoet, is hij definitief afgewezen.
Neem aan dat de testresultaten onafhankelijk van elkaar zijn.

4 *a.* Hoeveel % is de kans dat een willekeurige kandidaat wordt afgewezen?
5 *b.* Wat is de verwachtingswaarde van het aantal tests dat een willekeurige kandidaat zal moeten ondergaan?
5 *c.* Hoe groot is de kans dat bij een keuring van een groep van twintig kandidaten er bij de eerste test één slaagt, bij de tweede nul en bij de derde test weer één?
4 *d.* Uit een groep van vijftig kandidaten slaagde er slechts één bij de eerste test. Op grond van dit resultaat vermoedde iemand dat de slaagkans kleiner was dan 10 %. Is dit vermoeden terecht, wanneer men een significantieniveau van 2,5 % aanneemt?

5. Een oliemaatschappij heeft een voorraad van 200.000 barrels in Koeweit, 150.000 in Galveston en 100.000 in Caracas.
Een klant in NewYork heeft 300.000 barrels besteld.
Een tweede klant in Londen wil de overige 150.000 barrels afnemen.
De transportkosten in dollarcenten per barrel bedragen:

Naar / Van	New York	Londen
Koeweit	38	35
Galveston	10	22
Caracas	18	25

5 *a.* Maak een schema voor het transport van de totale voorraad van de oliemaatschappij in het geval er 140.000 barrels van Koeweit naar New York en 100.000 barrels van Galveston naar New York worden getransporteerd.
Hoe groot zijn de transportkosten in dat geval?
8 *b.* Bereken door middel van lineair programmeren een transportschema waarbij de transportkosten minimaal zijn.

max.
ptn.

Een andere oliemaatschappij beschikt over acht depots en verkoopt haar totale voorraad aan zes klanten.

5 *c.* De bedrijfseconoom van deze maatschappij moet een optimaal transportschema vaststellen.
Met hoeveel beslissingsvariabelen krijgt hij te maken?

Scoreresultaten VWO Wiskunde A

onderdeel		maximaal puntenaantal	gemiddelde score	p'-waarde	rit	Scoreverdeling per onderdeel (in procenten) 0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	a	4	3,0	76	0,26	3	8	16	30	43	-	-	-	-
	b	4	3,2	79	0,23	8	0	14	24	54	-	-	-	-
	c	3	2,7	91	0,39	3	5	8	84	-	-	-	-	-
	d	3	2,6	87	0,38	3	11	8	78	-	-	-	-	-
	e	4	2,8	70	0,09	11	8	16	22	43	-	-	-	-
2	a	2	2,0	97	0,18	3	0	97	-	-	-	-	-	-
	b	4	3,7	93	0,19	0	0	0	27	73	-	-	-	-
	c	3	2,1	70	0,06	8	16	32	43	-	-	-	-	-
	d	3	2,1	70	0,17	16	11	19	54	-	-	-	-	-
	e	3	2,2	73	-0,02	11	16	16	57	-	-	-	-	-
	f	3	2,0	68	0,30	11	19	27	43	-	-	-	-	-
3	a	3	2,4	79	0,16	11	11	8	70	-	-	-	-	-
	b	5	2,3	45	0,57	16	30	16	11	3	24	-	-	-
	c	5	3,5	70	0,40	3	14	22	8	3	51	-	-	-
	d	5	2,0	40	0,47	32	22	3	14	16	14	-	-	-
4	a	4	3,3	82	0,27	16	0	3	3	78	-	-	-	-
	b	5	1,6	31	0,40	46	14	14	5	8	14	-	-	-
	c	5	2,2	44	0,46	22	11	14	38	11	5	-	-	-
	d	4	2,4	59	0,40	16	14	27	5	38	-	-	-	-
5	a	5	4,2	84	0,16	0	3	11	11	16	59	-	-	-
	b	8	1,3	16	0,39	57	14	11	3	5	3	8	0	0
	c	5	0,4	9	0,42	76	8	14	3	0	0	-	-	-

Aantal kandidaten	37
Gemiddelde score (incl. 10 bonuspunten)	63,9
P'-waarde van het examen*	60
Percentage onvoldoenden	19
Gemiddeld cijfer	6,4
Cesuur'	54/55

N.B.:
In het januarinummer volgt 'VWO-Eindexamen Wiskunde A, periode 2', alsmede het verslag van een HEWET-experiment.

* *p'*-waarde = gemiddelde score, uitgedrukt in procenten van het maximaal te behalen puntenaantal

Wiskunde A examen voor vwo

PIETER DE ROEST

Voor me ligt het examen vwo wiskunde A. Eindelijk iets concreets van de HEWET. Ik heb als leraar ook wiskunde in mijn pakket, dus probeer ik het ook eens!

Opgave 1

a Met wat meetwerk kom ik op 355 ton SKE, iets links van het einde van de getrokken streep (motiveren moet weer!!!). Dat is 20 ton vermindering in 10 jaar, dus de afname is 2 ton per jaar.

b Als ik nu moet schatten zou ik zeggen 10×375 to $= 3750$ ton. Bij zulke vragen krijgen we dezelfde ellende als onze collega's geschiedenis, aardrijkskunde en nog wat andere vakken met de tweede correctie, als die er dan nog is.

c In de jaren '78 en '79, daar is de getrokken lijn boven de gestippelde!

d Dezelfde periode als in c) en ook '75, '76, want daar is de stijging sneller dan de voorspelling van '74, trouwens ook van die van '77 (fout kan het dus niet gaan).

e 66 mm. komt overeen met 300 ton SKE, die lijn doortrekken geeft 85 mm. boven 300 ton SKE, dus het geschatte zal $\frac{85}{66} \times 300 + 300$ ton SKE ≈ 685 ton SKE zijn.

Dat lijkt me niveau 3-havo, misschien wel 2-vwo (evenredigheden).

Opgave 2

Matrixrekening beheers ik wel een beetje, maar deze Leslie ken ik niet.

a Daar komen we misschien nog wel achter!

b $$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.01 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12000 \\ 12000 \\ 6000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 + 6000 + 60 \\ 6000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

Dit gaat niet best voor die soort, 7260 jongen, 6000 volw. en 3000 oud na 1 jaar.

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.01 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7260 \\ 6000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 726 + 3000 + 30 \\ 3630 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

Het gaat nog slechter, 3756 jongen, 3630 volw. en 1500 oud na twee jaar.

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.01 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3756 \\ 3630 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 376 + 1815 + 15 \\ 1878 \\ 908 \end{pmatrix}$$

En dat is hetzelfde resultaat als gegeven is bij $t = 3$. Ik zie nu ook dat die 0.25 betekent: de fractie van volwassen dieren die oud wordt.

c Dat papier heb ik niet voorhanden, maar enig rekenwerk geeft mij de formule $H_a = 10^{4.48-0.26t}$.

d Voor deze diersoort krijg ik $H_b = 3400(1 + 0.3)^{t-2}$.

e Soort B groeit nogah snel; heeft na 3 jaar 4420 individuen, en na 4 jaar al 5746. Dus ergens na het 3de jaar en voor afloop van het 4de jaar zijn er *net zo veel* van A als van B, nou ja ongeveer net zo veel. Bij dit soort problemen kan ik mij alleen maar net zulke zotte grafieken voorstellen als 'Der Spiegel' afdrukt!

f Dat kan mooi op mijn rekentuig. Ik moet tien keer de =-toets indrukken, dus in het 12de jaar zullen er 40.000 dieren van soort B zijn, maar wanneer precies? Ik denk ergens in de lente!?

Opgave 3

Alweer zo'n getrokken lijn, waarbij ik mij weinig continu's voor kan stellen. Er moet kennelijk gewerkt worden met een derdegraads-functie.

a Vind ik een belediging.

b Los op $t^3 - 363t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t \approx -19 \vee t \approx +19$
Dus bij $t = -19$ begint de afwijking.

c Differentieer $t^3 - 363t + 110.000$.
Dit wordt $3t^2 - 363$; dit nul stellen geeft $t = 11 \vee t = -11$, toename is dan $-1331 + 363 \cdot 11 = 2662$, dus 27%.

d Zulke vragen zouden toch niet mogen! De hele opgave is in weken en nu ineens in dagen gesteld.
Uit c) volgt dat de kosten bij $t = 0$ dalen met *f* 363 per week, en daar het een fabriek is, zou ik zeggen met *f* 72,50 per dag.

Opgave 4

Dit is in ieder geval gemakkelijker dan met rode, blauwe en gele knikkers! En uit het leven gegrepen!

a $(0.9)^3 = 0.729$, oftewel 73%.

b Nu dus toch maar de verwachtingswaarde leren; die wordt hier: $0.1 + 0.18 + 2.43 = 2.71$

c Deze vraag kan alleen bij groepjes kleiner dan 20, want verder gaat mijn tabellenboekje niet; kans is $0.27 \times 0.135 \times 0.3 = 0.0109$.

d Het vermoeden is niet terecht (kans is 3.4%).

Opgave 5

a 140.000 × 38
100.000 × 10
60.000 × 18
60.000 × 35
50.000 × 22
40.000 × 25
En dan al die nullen optellen!

b Lineair geprogrammeerd, eerlijk, maar er kwam uit wat ik al dacht, zo weinig

mogelijk uit Koeweit naar NewYork. Dus respectievelijk 50.000, 150.000 en 100.000.
Op de havo is dit moeilijk, leerlingen die moeite met wiskunde I hebben, krijgen hier ook problemen. Geen nood, stellen we dan een HEWAB-commissie in!

c Dat zal een regeltje worden: $8 \times 5 = 40$?

Opmerkingen

Dit examen is, uitgezonderd vraag 4 en 5 veel te eenvoudig.
Bij vraag 2 worden zoveel randvoorwaarden impliciet aangenomen, dat zowat elk antwoord op de vragen goed zal zijn. Ik heb zo mijn bezwaren tegen dit soort vragen en leraren biologie ook als ze begrijpen wat er staat en leraren wiskunde als ze door hebben wat er allemaal niet staat.

Wiskunde bedrijven met problemen uit de werkelijkheid is mooi, klinkt in ieder geval mooi. Die werkelijkheid is voor het HEWET-team blijkbaar alleen biologie en economie. Die werkelijkheid benader je zo, dat het model door leerlingen nog te bevatten is, en dan is het de werkelijkheid niet meer. Dan zijn we weer terug bij die schoenmakersleest, waar ook wiskundeleraren zich bij zouden moeten houden.

En er dreigt nog een gevaar, gezien het niveau: het gevaar dat γ-faculteiten en instellingen die nu wiskunde I eisen, straks wiskunde B gaan vragen, en dan zitten we met wiskunde A.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

Opgaven

Bij het opruimen van mijn kast vond ik een fotokopie van een aantal puzzels. Hieronder een drietal ervan. De herkomst weet ik dus niet.

497. Bewijs dat het produkt van de eerste vijftig oneven getallen minder is dan $\frac{1}{10}$ van het produkt van de eerste vijftig even getallen.

498. Iemand gooit een munt op. Op het moment dat de munt zijn hoogste punt bereikt, schiet een ander erop. Moet hij om de munt te raken richten op de munt, er boven of er beneden? (Verwaarloos de luchtweerstand.)

499. We gaan uit van het volgende axiomastelsel.
Grondbegrippen: punt en lijn. Een lijn is een verzameling punten.
Definitie: Als een punt element is van een lijn, zeggen we dat het punt op de lijn ligt of dat de lijn door het punt gaat.
Definitie. Twee lijnen l_1 en l_2 zijn evenwijdig betekent: $l_1 \cap l_2 = \phi$.
Axioma 1. Er bestaat ten minste één punt.
Axioma 2. Elke lijn is een verzameling van precies twee punten.
Axioma 3. Elk punt ligt op precies twee lijnen.
Axioma 4. Bij elke lijn l zijn er precies drie lijnen die evenwijdig aan l zijn.
Onderzoek deze meetkunde. Vind een model voor de axioma's. Zijn de axioma's onafhankelijk?

500. Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen begon zijn afscheidscollege met de volgende paradox.
Van de filosoof Protagoras wordt verteld, dat hij de taak op zich had genomen ene Euathlos de kunst bij te brengen, hoe voor de rechtbank het woord te voeren. Ten einde de deugdelijkheid van het onderricht te garanderen werd overeengekomen, dat de laatste termijn van het verschuldigde honorarium dan en alleen dan zou worden betaald, als Euathlos zijn eerste zaak voor het hof zou winnen. Evenwel maakte Euathlos na de voltooiing van de lessen geen aanstalten het geleerde in praktijk te brengen en dit verdroot Protagoras zodanig, dat hij bij de rechtbank een aanklacht tegen zijn pupil indiende.
De appellant, Protagoras, overwoog bij zichzelf het volgende: Als ik deze zaak win, dan moet Euathlos betalen krachtens de beslissing van de rechter; als ik de zaak verlies, dan moet hij mij betalen krachtens onze overeenkomst, want dan zal hij zijn eerste zaak hebben gewonnen. Nu zal ik of wel winnen, of wel verliezen. In ieder van die gevallen zal hij gehouden zijn mij te betalen.
De geïntimeerde, Euathlos, meende echter sterk te staan met de volgende overweging: Als ik deze zaak verlies, dan behoef ik krachtens onze overeenkomst niet te betalen, want dan zal ik mijn eerste zaak niet hebben gewonnen; als ik de zaak win, dan zal krachtens de beslissing van de rechter de appellant zijn vordering worden ontzegd en ik dus van betaling zijn vrijgesteld. Nu zal ik of wel verliezen, of wel winnen. In ieder van die gevallen zal ik niet gehouden zijn te betalen.
Wat denkt u ervan?

Oplossingen

494. *A* haalt uit een vat een fiche waarop een natuurlijk getal geschreven is en toont dit aan *B*. *B* moet zeggen of dit het grootste getal uit het vat is. In het vat bevinden zich een groot aantal fiches met verschillende natuurlijke getallen. Gevraagd een strategie die *B* een redelijk grote kans op succes geeft.
Noem het aantal fiches n. *B* kiest als strategie: de eerste p keer zeg ik neen. Daarna zeg ik de eerstvolgende keer ja, dat een getal getoond wordt dat groter dan alle voorgaande is. We rekenen eerst de kans op succes als functie van p uit en kiezen daarna p zo, dat deze kans optimaal wordt. *B* heeft succes als het $p + 1^e$ getal het grootste is van de eerste $p + 1$ getallen en bovendien het $p + 2^e$ niet het grootste van de eerste $p + 2$ getallen, het $p + 3^e$ niet het grootste van de eerste $p + 3$ enz. De kans hierop is

$$\frac{1}{p+1}\frac{p+1}{p+2}\frac{p+2}{p+3}\cdots\frac{n-1}{n}=\frac{1}{p}\frac{p}{n}$$

Hij heeft ook succes als het $p + 1^e$ getal niet het grootste is van de eerste $p + 1$ getallen, het $p + 2^e$ wel van de eerste $p + 2$, het $p + 3^e$ niet van de eerste $p + 3$ enz. De kans hierop is

$$\frac{p}{p+1}\frac{1}{p+2}\frac{p+2}{p+3}\cdots\frac{n-1}{n}=\frac{1}{p+1}\frac{p}{n}$$

Enz. Zodat de totale kans voor *B* op succes wordt

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)\frac{p}{n}$$

Een goede benadering hiervoor is

$$\frac{p}{n}\int_p^n\frac{1}{t}\mathrm{d}t=-\frac{p}{n}\ln\frac{p}{n}$$

Door differentiatie bepalen we het maximum van $-x \ln x$. Dit is e^{-1} en wordt bereikt voor $x = e^{-1}$. Afgerond 0,368.
Als $n = 10^6$, dan laat B dus de eerste 368000 getallen passeren, kiest het eerstvolgende getal dat groter is dan alle voorgaande en heeft een kans van ongeveer 0,368 op succes.
Een verbluffend resultaat!

495. Is het mogelijk elke driehoek zo orthogonaal te projecteren, dat de projectie gelijkzijdig is?
Gegeven een driehoek ABC. D, E en F zijn de middens van de zijden. Als we kans zien zo orthogonaal te projecteren, dat de projecties van hoek D en van hoek E rechte hoeken zijn, dan is ons doel bereikt. Zie figuur 1.

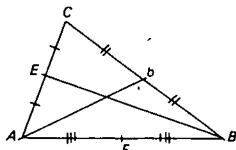


Fig. 1

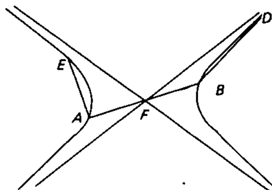
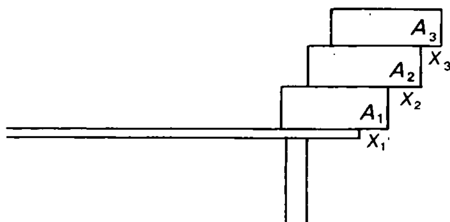


Fig. 2

Er is een kegelsnede met middelpunt F die door A, B, D en E gaat. Deze kegelsnede kan geen hyperbool zijn, omdat de verlengden van de lijnstukken AE en BD elkaar dan niet snijden. Zie figuur 2. Het is dus een ellips. Elke ellips kan zo orthogonaal geprojecteerd worden, dat de projectie een cirkel is. De vraag is hiermee bevestigend beantwoord.
Toegift. Gegeven twee driehoeken. Het is altijd mogelijk de een zo te projecteren (scheef), dat de projectie gelijkvormig met de ander is.

496. Op de rand van een tafel ligt een steen die een beetje uitsteekt, daarop weer een iets uitstekende steen enz. Hoe ver kan men de stenen in totaal over de rand laten uitsteken?



Onderstel er zijn n stenen. De stenen steken resp. uit $x_1, x_2, \ldots, x_n$. De lengteëenheid is de lengte van de steen.
Voorwaarde dat geen kanteling optreedt om A_1, is

$$x_1 + \frac{n-1}{n} x_2 + \frac{n-2}{n} x_3 + \ldots + \frac{1}{n} x_n \leqslant \tfrac{1}{2}$$

Want alle stenen steken x_1 uit, $n - 1$ van de n stenen bovendien nog x_2 enz. Ze mogen als geheel maximaal $\frac{1}{2}$ uitsteken.
Kies $x_1 = \dfrac{1}{2n}$, $x_2 = \dfrac{1}{2(n-1)}$, $\ldots$, $x_n = \frac{1}{2}$, dan is aan deze voorwaarde voldaan. Tevens ziet men, dat ook geen kanteling optreedt om $A_2, A_3, \ldots, A_n$.
De totale uitsteek is $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Omdat de harmonische reeks divergeert, kan men deze onbeperkt groot doen worden.

Boekbespreking

Ivo Schneider, *Archimedes*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1979. (Erträge der Forschung, Band 102). VIII + 209 p. DM 39,–.

Dit boekje is een beschrijving van leven en werk van Archimedes (ca. 287 - 212 v. Chr.), die gebaseerd is op het onderzoek in de laatste 60 jaar. Het bevat hoofdstukken over 1. het leven van Archimedes, 2. zijn ontwikkelingsgang, 3. zijn mechanisch, astronomisch en optisch werk, 4. zijn wiskundig werk, 5. zijn invloed op latere geleerden, en tot slot een uitgebreide bibliografie, waarin bijdragen van zeer ongelijke waarde zijn opgenomen.
Het boekje is vlot en onderhoudend geschreven. Schneider bespreekt talloze artikelen van anderen en geeft daarnaast een groot aantal eigen ideeën. Schneider behandelt het werk van Archimedes vanuit de visie dat Archimedes eerst lange tijd als technicus heeft gewerkt en pas op latere leeftijd tot beoefening van de wiskunde is gekomen (p. 57), maar dat hierbij practische mechanische experimenten een grote rol bleven spelen (p. 43, 40, 121, 131). Zijn argumenten voor deze visie zijn de volgende (tussen haakjes staat mijn commentaar, J. H.):
a (p. 43-46, 50-52, 57-58). Uit de voorwoorden van de *Kwadratuur van de Parabool* en *Over Spiralen* en het begin van *Over Bol en Cylinder I* kan volgens Schneider afgeleid worden dat Archimedes, toen hij de *Kwadratuur van de Parabool* schreef, nog geen theorie van grootheden had ontwikkeld, die kromme lijnen en gekromde oppervlakten inbegreep. (Ik heb dit niet kunnen afleiden, in de *Kwadratuur van de Parabool* is zo'n algemene theorie niet nodig, J.H.). Omdat Archimedes minstens 35 jaar oud was toen hij de *Kwadratuur van de Parabool* schreef, volgt dat hij pas laat tot beoefening van de wiskunde gekomen is. (Archimedes kan wiskunde beoefend hebben zonder dat hij de genoemde theorie had uitgewerkt, te denken valt bijv. aan stellingen uit de vlakke meetkunde, zoals die in de Arabische Archimedestraditie bewaard zijn, J.H.).
b Drachmann (1) heeft op basis van uitlatingen in de – in een 9e-eeuwse Arabische versie bewaarde – Mechanica van Heron (ca. 100 v. Chr.) getracht verloren gegane mechanische werken van Archimedes te reconstrueren, o.a. *Over Balansen* en *Over Kolommen*. Volgens Schneider kan men uit vorm en inhoud van deze gereconstrueerde werken afleiden, dat ze tot het vroege werk van Archimedes behoren (p. 76), dat dus meer 'practisch' van aard zou zijn. (Geen doorslaggevend argument, alleen al wegens het hypothetisch karakter van de reconstructies van Drachmann, J.H.).
Het bovenstaande dient om aan te tonen dat Schneiders visie op Archimedes niet de enig mogelijke is. Het is hierbij een bezwaar, dat met elkaar samenhangende argumenten vaak verspreid over het boek gegeven worden (vgl. de verwijzingen hierboven), zodat de lezer niet altijd gemakkelijk kan nagaan wat geconcludeerd wordt uit wat. Ondanks deze bedenkingen biedt het boekje naar mijn mening veel waar voor zijn geld.
In de 50 pagina's van hoofdstuk 4 kan natuurlijk alleen een beknopte inleiding in het wiskundig werk van Archimedes gegeven worden. Voor een uitgebreidere bespreking verwijs ik naar *Archimedes* van Dijksterhuis (2), dat in zijn geheel in *Euclides* verschenen is. In de literatuur (o.a. in de bibliografie van Schneider p. 178) wordt veelal onvolledig naar dit werk verwezen. Hieronder volgt de volledige verwijzing.

1 A. G. Drachmann, Fragments from Archimedes in Heron's Mechanics. *Centaurus* 8/1963/91-146.
2 E. J. Dijksterhuis, Archimedes. De volledige Nederlandse tekst is verschenen in Euclides 12/1935-6/19-55, 133-166, 235-246; 3/1936-7/80-127; 14/1937-8/40-71; 15/1938-9/96-135, 248-269; 16/1939-40/104-132; 17/1940-1/8-40, 239-265; 20/1943-4/31-74.
Het gedeelte uit de jaargangen 12-14 is uitgegeven als boek onder de titel *Archimedes, eerste deel*, Groningen (Noordhoff) 1938, Historische Bibliotheek voor de Exacte Wetenschappen deel VI. De volledige Nederlandse tekst is in het Engels vertaald, van een index van namen voorzien en verschenen als *Archimedes*, Kopenhagen (Munksgaard) 1956, Acta Historica Scientiarum Naturalium et Medicinalium vol. 12.

J. P. Hogendijk

Hermann Athen, Heinz Griesel, Mathematik Heute, *Grundkurs Analysis 1*, *Grundkurs Analysis 2*, *Einführung in die Analysis 1*. Schroedel Verlag KG, Hannover, 104 blz./112 blz./192 blz.

Genoemde boeken maken deel uit van de *Materialien für die Sekundarstufe II Mathematik*; de behandelde stof komt grotendeels overeen met de leerstof wiskunde een in de bovenbouw van ons v.w.o., echter zonder differentiaalvergelijkingen; rijen komen wel voor, o.a. bij de definiëring van de afgeleide functie.
De boeken geven blijk van een doordachte didactische opzet; de conceptie is zodanig dat men op verschillende niveau's, afgestemd op de capaciteiten van de leerlingen, onderwijs kan geven. Ook wordt verrijkingsstof aangeboden in de vorm van extra opgaven; in deze extra opgaven zijn nog weer twee moeilijkheidsgraden te onderscheiden.Een nieuw onderwerp wordt steeds ingeleid door een opave aan te bieden waarvan dan in het boek de volledige oplossing wordt gegeven. Deze opgave moet bij de leerling een aktiviteit op gang brengen die moet leiden tot de invoering en definiëring van nieuwe begrippen, stellingen of technieken. Hierdoor en met behulp van de vele opgaven zullen de vluggere en meer gemotiveerde leerlingen zonder veel hulp van de docent vooruit kunnen, al zullen enkele van de extra opgaven met 'Zusatzstoff mit höhere, Schwierigkeitsgrad' nog wel problemen geven. Dat men, nadat een stelling bewezen is, het bewijs nog eens kritisch bekijk blijkt o.a. bij de formule voor de oppervlakte van een vlakke figuur, begrensd door de grafiek van een functie f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$. De volgende axioma's worden dan genoemd en in de extra opaven nader bekeken, hoewel niet op allc opgeworpen vragen een antwoord wordt gegeven:

1 Wird eine Fläche mit dem Flächeninhalt A in zwei Teilflächen mit den Flächeninhalten A_1 und A_2 zerlegt, so gilt: $A = A_1 + A_2$.
2 Sind die beiden Flächen F_1 und F_2 kongruent, so sind ihre Flächeninhalte gleich.
3 Der Flächeninhalt der Einheitsquadrate ist gleich 1.

Uiteraard komen toepassingen van de theorie op het gebied van de natuurkunde, de economie, enz. aan de orde; zelfs de 'Steuerfunktion' uit de Duitse belastingwetten van 01-01-1979 wordt onderzocht. Enkele andere functies, die als oefenmateriaal voorkomen, zijn de heavisidefunctie en de signumfunctie.
Het gebruik van de rekenmachine wordt gestimuleerd, bijvoorbeeld bij de benadering van wortels van een vergelijking door de methode van Newton of de regula falsi, alsmede bij de betrekkening van Riemannse sommen. Voor een betere overzichtelijkheid zijn op elke bladzijde twee kolommen tekst te vinden; de 'binnenste' kolom bevat de theorie en wat daar bij hoort, de 'buitenste' kolom bevat de opgaven, waaronder ook de extra opgaven.
Tenslotte: van dezelfde schrijvers verscheen het boek *Grundkurs Stochastik*, dat volgens dezelfde principes is opgebouwd; een recensie over dit werk kunt u vinden in Euclides, 56e jaargang. blz. 380.

G. M. Hogeweij

Mededelingen

STUDIEDAG/JAARVERGADERING van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Op *zaterdag 12 november 1983* houdt de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een studiedag in combinatie met de jaarvergadering in het gebouw van de SOL, Archimedeslaan 16, Universiteitscentrum De Uithof te Utrecht, van 10.00 tot 17.00 uur.
(zie voor agenda en nadere informatie het augustus/september nummer en het oktobernummer van Euclides)

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1982 - 31 juli 1983

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester F. F. J. Gaillard, overige leden L. Bozuwa, dr. J. van Dormolen, C. Th. J. Hoogsteder, M. Kindt, F. Mahieu, mw. drs. N. C. Verhoef.
Op zaterdag 30 oktober werd de jaarvergadering gehouden in het gebouw van de SOL te Utrecht. Deze jaarvergadering was gecombineerd met een studiedag, die verzorgd was door een werkgroep uit de NLO's, in samenwerking met de SLO. Het thema voor deze dag was 'Examen anders bekeken'. De aanwezigen op deze studiedag konden deelnemen aan één of meer van de volgende studiegroepen: schoolonderzoek; mavo-examen in één zitting; HEWET en het schoolonderzoek; examens op langere termijn; pas op met veranderingen in het examen; correctie en normering; hoe examens tot stand komen; gedifferentieere examens; samen aan de slag?
Ook hield de heer F. Dolmans een lezing, getiteld 'Op weg naar een zinvoller wiskunde onderwijs'. Veel leden waren aanwezig, 212 tekenden de presentielijst. Door de publikatie 'Examen anders bekeken' van de voorbereidende werkgroep waren zij reeds van tevoren ingeleid in de activiteiten van de studiegroepen.
Op deze jaarvergadering is het nieuwe huishoudelijk reglement goedgekeurd, zodat dit nu is aangepast aan de nieuwe statuten. Op zaterdag 26 maart hielden de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars hun achtste gemeenschappelijke studiedag in het Belgische Kapellen. Op deze bijeenkomst waren werkgroepen onder leiding van dr. J. van Dormolen over 'Leraren wat een bewijs is' en sprak dr. R. van Looy over 'Didactische aspecten van de aritmetica van Gauss'.
Op 17 en 18 mei vonden examenbesprekingen plaats voor wiskunde lbo-c, mavo-c en mavo-d in 21 plaatsen, voor wiskunde havo in 6 plaatsen, voor wiskunde I vwo in 6 plaatsen en voor wiskunde II vwo in Utrecht.
Nadat het bestuur eerst in november een mededeling van de Staatssecretaris van Onderwijs had gekregen dat de ACLO-wiskunde in oprichting zou worden opgeheven, ontving zij in februari een mededeling van de SLO dat verenigingen konden opteren voor één of meer plaatsen in de nieuw op te richten ACLO's. In april vernam zij dat onze vereniging vermoedelijk twee plaatsen in de nieuwe ACLO-wiskunde zou krijgen en kreeg zij het verzoek hiervoor kandidaten te noemen. In mei kwam het bericht dat de instelling van deze ACLO's vermoedelijk niet door zou gaan. Het bestuur heeft een brief aan de Staatssecretaris geschreven, waarin zij er op aandrong dat hij de instelling niet zou tegengaan, doch in juni bereikte ons het bericht dat de voorbereidende werkzaamheden voor de instelling van de nieuwe ACLO's voorlopig was opgeschort.
De didactiekcommissie heeft dit jaar gewerkt met drie werkgroepen, namelijk variabelen, evenredigheden en wiskunde in 3-havo.
De werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' hield dit jaar landelijke dagen op 9 oktober en 23 april. Verder werkte zij met de volgende werkgroepen: onderzoeksgroep vrouwen en wiskunde; wiskunde in het volwassenenonderwijs; literatuurgroep; werkgroep schoolboeken; werkgroep vrouwen en informatica en HEWET-groep.
In de redactie van Euclides werd B. Zwaneveld als hoofdredacteur opgevolgd door F. Dolmans en werd W. P. de Porto opgevolgd door mw. I. van Breugel. De redactie stelde een nieuw huishoudelijk reglement op, dat door het bestuur van de vereniging is goedgekeurd.
Ook dit jaar was er een nauwe samenwerking met de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars die

zich onder andere uitte in de gemeenschappelijke bestuursvergadering in september, de gemeenschappelijke studiedag in maart en bezoeken aan elkaars bijeenkomsten.
Dit jaar was er ook een samenwerking met de Finse vereniging van docenten wiskunde, natuurkunde en scheikunde MAOL. Ruim honderd leden van deze vereniging bezochten van 2 tot 7 juni ons land. Op zaterdag 4 juni hadden zij een bijeenkomst in Utrecht, waar zij het Niels Stensen College bezochten en lezingen over HEWET en PLON volgden. Op maandag 8 juni bezochten zij verscheidene scholen in Amsterdam.
Het bestuur was verder vertegenwoordigd op redactievergaderingen van Euclides, op het congres, tevens jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Onderwijsgevenden in de Natuurwetenschappen, bij de prijsuitreiking van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en bijeenkomsten van de Werkgroep Participerend Leren. Het bestuur vergaderde dit jaar elf maal, waaronder één maal met de inspecteurs J. Boersma, drs. W. E. de Jong en drs. B. J. Westerhof.

VVWL-studiedag Antwerpen, 19 november 1983

De VVWL houdt op zaterdag 19 november 1983 een studiedag in de Stedelijke Industriële Hogeschool Antwerpen Middenstad (I.H.A.M.), Paardenmarkt 94, 2000 Antwerpen.
Thema: PASCAL, PROGRAMMEERTAAL VOOR HET ONDERWIJS.
Agenda
9.30: Ontvangst van de deelnemers
10.00: Opening door voorzitter Frank Laforce
10.05: Prof. dr. J. Paredaens (Universitaire Instelling Antwerpen): *Kenmerken van de programmeertaal Pascal*
11.10: dr. H. Olivié (I.H.A.M.): *Praktisch gebruik van Pascal op een microcomputer*
12.15: Lunch in de refter van I.H.A.M. (broodmaaltijd)
13.45: ing. E. Verhulst (I.H.A.M.): *Pascal als hulpmiddel voor het implèmenteren van administratieve pakketten voor scholen* of
lic. R. Jacobs-Claessens (K.A. Laken): *Persoonlijke ervaringen bij het aanleren van Pascal in het zesde jaar M.O.*
14.30: Verscheidene parallelle demonstraties die herhaald worden:
Prof. dr. W. Kuijk (RUCA): *Codesysteem voor publiek gebruik*
lic. P. Brants (SISO Paardenmarkt Antwerpen): *Veeltermvergelijkingen, Tekenen van fraktale krommen, Gebruik en opstellen van bibliotheekprogramma's*
lic. P. De Witte (I.H.A.M.): *Gebruik van de grafische mogelijkheden van een microcomputer in Pascal*
ing. E. Verhulst (I.H.A.M.): *Een administratief pakket scholen. Samen gebruiken van randapparatuur door meerdere gebruikers*
dr. H. Olivié (I.H.A.M.): *Een pakket met meerkeuzetests*
R. Wellens (student I.H.A.M.): *Een statistisch pakket*
16.30: Sluiting
De VVWL-monografie nr. 6: 'Pascal, programmeertaal voor het onderwijs', die de teksten van de voordrachten en verklaringen bij de demonstraties bevat, zal aan de deelnemers worden uitgereikt.
De deelnemersbijdrage inclusief monografie 6 en broodmaaltijd is 300 fr. Leden VVWL betalen slechts 200 fr. Deze bijdrage moet vóór 4 november 1983 gestort worden op prk. 000-1116247-68 van VVWL, Hoge Aardstraat 44, 2610 Wilrijk, met vermelding: 'Pascal'. Voor inschrijvingen na die datum kan geen maaltijd meer voorzien worden. (Eetgelegenheid in de buurt.)

De paardenmarkt ligt vlak bij de uitgang van de Waaslandtunnel. Het is een brede zijstraat van de Italielei. Deze lei die na de Amerikalei, Britselei, Frankrijklei (waarop de Keyserlei met het Centraal Station uitmondt), Antwerpen-Zuid (E3, Singel, Kennedytunnel) met Antwerpen-Noord verbindt. Parkeergelegenheid in de omgeving.
Extra exemplaren van de Monografie kosten 200 fr. en zijn ter plaatse te koop.
Aanvullende inlichtingen kunnen verkregen worden op het adres van de VVWL, Elzenhoutstraat 1 bus 3, 2610 Wilrijk, tel. 03/4403194 of bij A. Schoeters, Provinciale Verantwoordelijke voor Antwerpen, Postbus 89 Antwerpen 2020, tel. 03/2379072.
Alle belangstellenden zijn hartelijk welkom.

Symposium 'Computer in de klas'

Zaterdag 26 november 1983 van 9.15-17 uur in de UIA, Universiteitsplein 1, Wilrijk-Antwerpen met didactische programma's, didactiek van de informatica en nieuwe ontwikkelingen; tevens doorlopende demonstraties en ruilbeurs.
Inlichtingen: UIA-CBL, tel. 03/828.25.28 toestel 128 of 462.
Kosten: 250 fr. (incl. syllabus) of 430 fr. (incl. warme maaltijd).
Inschrijving: voor 11/11/83 door overschrijving op rek. nr 001-1165360-78 van UIA-CBL, Wilrijk, België.

Kalender

Zaterdag 12 november 1983 jaarvergadering/Studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Zaterdag 19 november 1983 VVWL-studiedag Antwerpen.
Woensdag 23 november 1983 bestuursvergadering NVvW.
Zaterdag 26 november 1983 Teachipdag, SOL Utrecht; Symposium 'Computers in de klas' Antwerpen.
20-24 maart 1984 Internationale Lehrmittelmesse DIDACTA 84, Basel, inl.: Sekretariat DIDACTA 84, Postfach, CH-4021 Basel, Zwitserland.



de rijksuniversiteit groningen vraagt:

HERHAALDE OPROEP

docent vakdidactiek wiskunde m/v

(vac.nr. 830913/1937)

voor de lerarenopleiding aan het Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMP) van de Universiteit van Ouagadougou (Boven-Volta), in het kader van een samenwerkingsproject tussen deze universiteit en de Rijksuniversiteit te Groningen.

De docent(e) zal worden aangesteld voor een periode van één jaar, met mogelijkheid tot verlenging. Er wordt naar gestreefd om uitzending te doen plaatsvinden per 1 januari 1984 of zoveel eerder als mogelijk is.

Taakomschrijving:
— geven van onderwijs in de vakdidactiek Wiskunde
— ontwikkeling van een cursus vakdidactiek
— begeleiden van hospiteerstages
— voorbereiden en verzorgen van bij scholingscursussen voor leraren
— geven van een bijdrage aan het Wiskunde-onderwijs van het IMP
— in samenwerking met de staf van het Institut meewerken aan de herprogrammering van de lerarenopleiding.

Vereisten:
— eerstegraads onderwijsbevoegdheid in de wiskunde
— aantoonbare belangstelling voor de didactiek van de Wiskunde
— ervaring in het voortgezet onderwijs, bij voorkeur ook in een ontwikkelingsland
— beheersing van de Franse taal strekt tot aanbeveling.

Aanstelling en salariëring geschieden overeenkomstig het rangenstelsel voor wetenschappelijk ambtenaar, afhankelijk van opleiding en ervaring.

Aanstelling en uitzending geschieden behoudens goedkeuring van de Nederlandse- en Voltaanse overheid.

Inlichtingen kunnen worden ingewonnen bij: J.J. Sloff, tel. 050-116730/116724 of 05999-4569 (privé), docent vakdidactiek wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen en bij: K. Hollman, tel. 050-118162 of 050-122462 (privé), docent vakdidactiek wiskunde aan de Nieuwe Leraren Opleiding Ubbo Emmius.

Sollicitaties:
Schriftelijke sollicitaties vóór 5 november a.s. te richten aan de wnd. directeur van de Dienst Personeelszaken der Rijksuniversiteit, postbus 72, 9700 AB Groningen, onder vermelding van het vacaturenummer op brief en enveloppe. Algemene inlichtingen worden gaarne verstrekt door het bureau Werving & Selectie, tel. 050-114033 en 117640.

INHOUD

ADRESSEN VAN AUTEURS

H. Broekman, Ped. Did. Inst. der RU Utrecht, Heidelberglaan 2, Postbus 80-120, 3508 TC Utrecht

Prof. dr. D. van Dalen, Mathematisch Instituut der RU Utrecht, Budapestlaan 6, 3584 CD Utrecht

Ir. H. Mulder, Geerbroekseweg 27, 4851 RD Ulvenhout

R. van Raaij, Prof. J.W. Dieperinklaan 15, 3571 WJ Utrecht

P. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten